TS : TD n° 1 sur le théorème des valeurs intermédiaires et la dérivation

I

1. Démontrons que l'équation $\cos(4x+2)-8x=-1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(x)=\cos(4x+2)-8x$.
   L'équation s'écrit alors $f(x)=-1$

   - f est continue (comme somme et composée de fonctions continues)
   - Limite en $-\infty$:
     Pour tout x, $-1\leqslant\cos(4x-2)\leqslant 1\Rightarrow -1-8x\leqslant\cos(4x+2)-8x=f(x)\leqslant 1-8x$
     $\lim\limits_{x\to-\infty}(-1-8x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ d'après le théorème de comparaison.
     $f(x)$ prend donc des valeurs supérieures à -1.
   - Limite en $+\infty$:
     Pour tout x, $\cos(4x-2)\leqslant 1\Rightarrow\cos(4x+2)-8x=f(x)\leqslant 1-8x$
     $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-8x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ d'après le théorème de comparaison.
     $f(x)$ prend donc des valeurs inférieures à -1.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)==-1$ admet (au moins) une solution.

   Unicité : pour montrer l'unicité de cette solution, étudions les variations de la fonction f. f est dérivable : $f=cos(u)-v$ avec $\begin{cases}u(x)=4x+2\\ v(x)8x\end{cases}$.

   $f'=-u'\sin(u)-v'$ avec $\begin{cases}u'(x)=4\\ v'(x)=8\end{cases}$.

   On en déduit $f'(x)=-4\sin(4x+2)-8=-4(\sin(4x+2)+2)$.
   Or $-1\leqslant\sin(4x+2)\leqslant 1$ donc $1\leqslant\sin(4x+2)\leqslant 3$ d'où $-12\leqslant -4(\sin(4x+2))\leqslant -8$.
   On en déduit que $f'(x)<0$ donc f est décroissante.
   La solution de l'équation $f(x)=-1$ est donc unique. Notons-la α.
2. À la calculatrice, on trouve $\boxed{0,05\leqslant\alpha\leqslant 0,06}$

II

La fonction $f : x\longmapsto x|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

$f(0)=0$.

Pour tout $h\neq 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=|h|$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(h)+f(0)}{h}\right)=0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

On en déduit que la courbe représentative de f admet une tangente en 0 parallèle à l'axe des abscisses (c'est même l'axe des abscisses).

III

Calculer l'expression de dérivées des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

$f_1(x)=\left(5x^3-4\right)^2$ $f_1=u^2$ avec $u(x)=5x^3-4$.
$f_1'=2u'u$ avec $u'(x)=5\times 3x^2=15x^2$.
Alors $f_1'(x)=2\times 15x^2\times\left(5x^3-4\right)=\boxed{30x^2\left(5x^4-3\right)}$.

$f_2(x)=\sqrt{4x^2+4x+1}$
$f_2=\sqrt{u}$ avec $u(x)=4x^2+4x+1$.
$f_2'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x)=8x+4$.
Pour $x\neq-\dfrac{1}{2}$, $f_1'(x)=\dfrac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+1}}=\boxed{\dfrac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}}$.

$f_3(x)=\left(5x^3-3x+2\right)^6$ $f_3=u^n$ avec $u(x)=5x^3-3x+2$ et $n=6$.
$f_2'=nu'u^{n-1}=6u'u^5$ avec $u'(x)=15x^2-3=3\left(5x^2-1\right)$.
Alors : $f_2'(x)=6\times 3\left(5x^2-1\right)\times\left(5x^3-3x+2\right)^5=\boxed{18\left(5x^2-1\right)\times\left(5x^3-3x+2\right)^5}$

$f_4(x) = \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3$.

$f_4 = u^3$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x+6}$ pour $x \neq -6$.

Alors $f_4' = 3u'u^2$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+6)^2}$ car $u = \dfrac{1}{v}$ d'où $u' = -\dfrac{1}{v^2}$.

Alors $f_4'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{1}{(x+6)^2}\right) \times \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3 = \boxed{-\dfrac{3}{(x+6)^5}}$

$f_5(x) = 2\sin(-3x+2) - \dfrac{4}{x}$.

$f_5 = 2\sin(u) = 4 \times v$ avec $u(x) = -3x+2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f_5' = 2u'\cos(u) - 4 \times v'$ avec $u'(x) = -3$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$\boxed{f_5'(x) = 2(-3\cos(-3x+2)) + \dfrac{4}{x^2}}$

$f_6(x) = (3x+5)\sqrt{x}$

$f_6 = uv$ avec $u(x) = 3x+5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$f_6' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On en déduit : $f_6'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+5) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \dfrac{3x+5}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x+5}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x+3x+5}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}}$

IV

Soit f la fonction n définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculons $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.

   $f'(x) = \cos(x)$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ et $f^{(4)}(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x) = f(x)$ donc $\boxed{f^{(4)} = f}$.
2. On constate qu'en dérivant quatre fois de suite, on retrouve la fonction de départ.
3. On montre alors « facilement » par récurrence que :
   - si $n = 4p$ (multiple de 4), $f^{(n)} = f$.
   - si $n = 4p+1$ (multiple de 4 plus 1), $f^{(n)} = f'$.
   - si $n = 4p+2$ (multiple de 4 plus 2), $f^{(n)} = f''$.
   - si $n = 4p+3$ (multiple de 4 plus 3), $f^{(n)} = f^{(3)}$.

V

Sur l'écran d'une calculatrice, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \text{ et } g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

semblent tangentes au point A(1 ; 1).

- Il est clair que $f(1)g(1) = 1$ donc A appartient aux deux courbes.
- Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

  $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

  L'équation de la tangente en A est alors $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$
- Équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en A : $y = f'(1)(x-1) + g(1)$.

  $g'(x) = -\dfrac{1}{4} \times 2x + 1 = -\dfrac{x}{2} + 1$ d'où $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

  L'équation de la tangente en A est alors $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$.
- Les deux courbes ont une tangente commune en A ; elles sont donc tangentes en A