Correction du DST n° 1

I **5 pointss**

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   (b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.
   - **Initialisation.** On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :
   $$u_k \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \tag{HR}$$
   on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$.
   D'après (HR) :
   $$\begin{array}{rcll} u_k & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0{,}5^k & \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5} u_k & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0{,}5^k & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^k : \\ \frac{1}{5} u_k + 3 \times 0{,}5^k & \geqslant & \frac{3}{4} \times 0{,}5^k + 3 \times 0{,}5^k & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} & \geqslant & \frac{15}{4} \times 0{,}5^k & \end{array}$$
   Or, pour tout entier naturel k, $0{,}5^k \geqslant 0{,}5^{k+1}$, on en déduit donc que :
   $$\boxed{u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}}$$
   et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul :
   $$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n \\ & = & 3 \times 0{,}5^n - \frac{4}{5} u_n \\ & = & \frac{4}{5} \left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^n - u_n \right) \end{array}$$
   D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :
   $$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} \\ & = & \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n \\ & = & \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n \\ & = & \frac{1}{5} \left(u_n - 10 \times 0{,}5^n \right) \\ & = & \frac{1}{5} v_n. \end{array}$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
   Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit que $-8\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = u_n - 10\times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.

(c) $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.

On en déduit par opérations sur les limites que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que u>0,01	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3\times 0{,}5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

II **5 points**

Partie A

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Pour tout x, $u'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ qui s'annule en 0 et en 1.
   $6x(x-1) > 0$ à l'extérieur des racines (signe de 6).
   Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

2. Sur $]-\infty\,;\,2]$, il est clair que $u'(x) < 0$.
   Sur $[1\,;\,2]$, u est continue, $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = 3 > 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1\,;2]$. Celle-ci est unique d'après les variations de u. On la note α. (et $u(x) > 0$ pour $x > 2$)
3. Signe de $u(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

4. À la calculatrice, on trouve : $\boxed{\alpha \approx 1{,}68}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
   - Limite en -1 : $\displaystyle\lim_{x\to-1}(1-x) = 2$; $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(1+x^3) = 0$ avec $1+x^3 < 0$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(1+x^3) = 0$ avec $1+x^3 > 0$.
     On en déduit : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$
   - Limite en $+\infty$:
     On a une forme indéterminée; pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1\right)} = \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}$.
     $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right) = -1$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}+1\right) = 1$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)\right) = +\infty$.
     Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-\left(1+x^3\right) - 3x^2(1-x)}{\left(1+x^3\right)^2} = \dfrac{-1-x^3-3x^2+3x^2}{\left(1+x^3\right)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2-1}{\left(1+x^3\right)^2} = \boxed{\dfrac{u(x)}{\left(1+x^3\right)^2}}$.

3. $f'(x)$ est du signe de $u(x)$donc négatif pour $x \leqslant \alpha$, positif pour $x \geqslant \alpha$ et $f'(\alpha) = 0$.
Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$.
Or $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 = 3\alpha^2 + 1$ donc $\alpha^3 = \dfrac{3\alpha^2+1}{2}$
Alors $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{1+\frac{3\alpha^2+1}{2}} = \dfrac{1-\alpha}{\frac{3+\alpha^2}{2}} = \boxed{\dfrac{2(1-\alpha)}{3\left(1+\alpha^2\right)}}$

Partie C

Soit les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Il semble que $\mathscr{C}_g$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_h$ pour $x < 0$ et pour $x > 1,7$ environ.
2. $g(x) - h(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2(x-1)}{x} - \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{2x^2x - 1 - x^2 - 1}{2x} = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 1}{2x} = \dfrac{u(x)}{2x}$.
On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$	0		α		$+\infty$à
$u(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-$	‖	$+$		$+$	
$g(x) - h(x)$	$+$	‖	$-$	0	$-$ 0	$+$

La conjecture est confirmée.

III

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Soient M et N deux points de l'espace.
Le **plan médiateur** d'un segment [MN] de l'espace est l'ensemble des points de l'espace P équidistants de M et N ; c'est donc l'ensemble des points P de l'espace tels que MP = NP.

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC]. Le point K est le milieu du segment [CD].

Partie A : construction d'une section

Le plan (EIJ) coupe le plan (ABF) selon la droite (EI) et le plan (BCG) selon la droite (IJ).
Un plan coupe eux plans parallèles selon des doutes parallèles, donc le plan (EIJ) coupe le plan (ADH) selon la droite (ED) car (IJ) et (FC) sont parallèles (réciproque du théorème de Thalès).
Ce plan (EIJ) coupe le plan (ABC) selon la droite (JD) puisque J et D appartient à ce plan.
La section du cube par le plan (EIJ) est donc le quadrilatère EIJD.

Partie B : démonstration d'une propriété de l'espace.

On souhaite démontrer ici la proposition $\mathscr{P}$:

> **Proposition** $\mathscr{P}$
> Soient M et N deux points de l'espace. Soient P et Q deux points du plan médiateur du segment [MN].
> La droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN).

Soient P et Q deux points du plan médiateur d'un segment [MN]. Soit I le milieu du segment [MN]

1. Par définition d'un plan médiateur, P est équidistant de M et N. De même, I est équidistant de M et N.
   La droite (PI) est donc une médiatrice du serment [MN], donc (PI) et (MN) sont orthogonales.

   On admet que la droite (MN) est orthogonale à la droite (QI).
2. (MN) est orthogonale à deux droites (PI) et (QI) non parallèles du plan (PQI), donc (MN) est orthogonale au plan (PQI).
3. (MN) est donc orthogonale à toute droite de ce plan, donc en particulier à la droite (PQ).

Partie C : Une application

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}; -\overrightarrow{\text{AB}}; -\overrightarrow{\text{AD}}; -\overrightarrow{\text{AE}}\right)$. On considère à nouveau le cube défini précédemment.

1. On a : A(0 ; 0 ; 0), G(1 ; 1 ; 1), $I\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $J\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.
2. (a) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $AI = \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\ ;\ 0\end{pmatrix}$ donc $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   Donc $AI = AJ$.
   $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $GI = \frac{\sqrt{5}}{2}$
   $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ d'où $GJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit $GI = GJ$.
   A et G sont équidistants de I et J ; ils appartiennent donc au plan médiateur de [IJ].

   (b) On admet de même que A et G appartiennent au plan médiateur de [JK]. En utilisant la propriété $\mathscr{P}$, on en déduit que la droite (AG) est orthogonale à la droite (IJ) ; de même, elle est orthogonale à la droite (JK).
   On en déduit qu'elle est orthogonale au plan (IJK) car (IJ) et (JK) ne sont pas parallèles, donc définissent le plan (IJK)

.

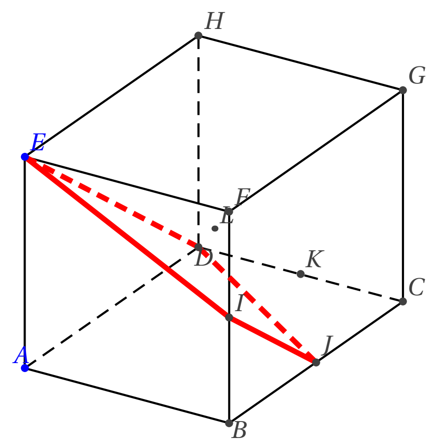
3. On appelle L le centre du cube ABCDEFGH.
   (a) On a : $I\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $J\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ et $L\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\;\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\right)$.
   I, J, K et L sont coplanaires si, et seulement si, il existe α et β tels que $\overrightarrow{IL} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.
   Cela donne le système : $\begin{cases}0 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\\\frac{1}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2}\\-\frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = -1\\\beta = -1\\\alpha = 1\end{cases}$.
   On en déduit que L, I, J et K sont coplanaires.

   (b) L est le centre du cube, donc L est l'intersection des diagonales du cube. L est donc le milieu de la diagonale [AG] /

   Le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{Aire de base} \times \text{hauteur}}{3}$.
   Comme base, prenons le triangle IJK. Ce triangle est rectangle en J, car [IJ] et [JK] appartiennent à deux faces orthogonales du cube.
   D'après le théorème de Thalès, $IJ = \frac{FC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   De même, $JK = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'aire du triangle IJK est donc $\frac{IJ \times JK}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

La droite (AL) est orthogonale au pan (IJK) donc [AL] est la hauteur issue de A dans le tétraèdre AIJK.
$AL = \dfrac{AG}{2}$; d'après le théorème de Pythagore, $AG^2 = AC^2 + CG^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 3$ donc $AG = \sqrt{3}$.
Par conséquent : $AL = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Alors le volume du tétraèdre est : $V = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$; $\boxed{V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}}$

Section :



IV

Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $I = [0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1-nx^2+x^3}{1+x^2}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère du plan. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.
Le graphique donné en annexe représente la droite $\mathscr{D}$ et les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n \in \{0;1;2;3;4\}$.
En considérant ce graphique, il semble que $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{D}$ s'intersectent en un unique point $M_n(x_n, x_n)$.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (x_n).

1. (a) Il semble que la suite (x_n) soit décroissante.
   (b) La suite (x_n) semble convergente
2. **Dans cette question, on suppose que** $n = 0$**.** On s'intéresse donc à la fonction f_0 définie sur I par $f_0(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x^2}$.
   (a) $f_0(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x^3}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 1+x^3 = x\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow \boxed{x=1}$.
   (b) $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{D}$ ont un unique point d'intersection $M_0(1\ ;\ 1)$.

Dans toute la suite, on admet que la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_n$ ont un unique point d'intersection M_n et on note x_n l'abscisse de M_n.

Soit n un entier naturel non nul.

3. (a) Résoudre l'équation (E_n) ; $nx^2+x-1=0$ sur l'intervalle I. $\Delta = 1+4n > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles.
   La solution positive est $\dfrac{-1+\sqrt{1+4n}}{2n} = \boxed{\dfrac{\sqrt{4n+1}-1}{2n}}$.
   (b) Pour tout x, $f_n(x) = x - a_n + \dfrac{b_n - x}{1+x^2} \Leftrightarrow \dfrac{1-nx^2+x^3}{1+x^2} = x - a_n + \dfrac{b_n-x}{1+x^2}$
   $\Leftrightarrow \dfrac{1-nx^2+x^3}{1+x^2} = \dfrac{(x-a_n)\left(1+x^2\right)+b_n-x}{1+x^2} \Leftrightarrow 1-nx^2+x^3 = x+x^3-a_n-a_nx^2+b_n-x$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = n \\ b_n = n+1 \end{cases}$ en identifiant les coefficients.
   (c) $f_n(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1-nx^2+x^3}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 1-nx^2+x^3 = x\left(1+x^2\right)$
   $\Leftrightarrow 1-nx^2+x^3 = x+x^3 \Leftrightarrow nx^2+x-1=0$, c'est-à-dire l'équation (E_n).
   (d) On en déduit que $\boxed{x_n = \dfrac{\sqrt{4n+1}-1}{2n}}$.
   (e) En utilisant l'expression conjuguée, on trouve :
   $x_n = \dfrac{\left(\sqrt{4n+1}-1\right)\times\left(\sqrt{4n+1}+1\right)}{2n\left(\sqrt{4n+1}-1\right)} = \dfrac{(4n+1)-1}{2n\sqrt{4n+1}+1} = \dfrac{4n}{2n\sqrt{4n+1}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4n+1}+1}$.
   Il est clair que $\sqrt{4n+1}+1$ est le terme d'iuune suite croissante donc (x_n) est une suite décroissante.
   Il est aussi clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n+1}+1\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$.