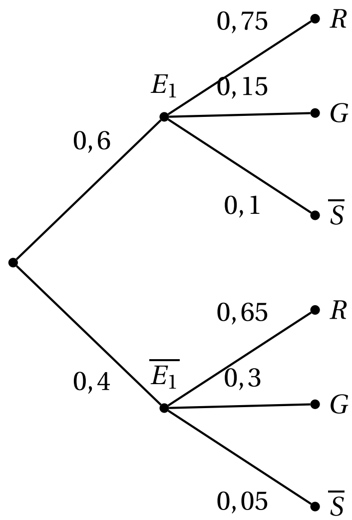
Terminale S : correction du devoir sur feuille n° 4

I Nouvelle-Calédonie mars 2008

Notons :

- E_1 : « l'alevin vient de l'élevage n° 1 »
- S : « l'alevin a survécu »
- R : « l'alevin devient rouge »
- G : l'alevin devient gris.

On a alors : $p(E_1) = 0,6$; $p_{E_1}\left(\overline{S}\right) = 0,1$; $p_{E_1}(R) = 0,75$; $p_{E_1}(G) = 0,15$; $p_{E_2}(\overline{S}) = 0,65$; $p_{E_2}(R) = 0,65$; $p_{E_2}(G) = 0,3$.
Résumons la situation par un arbre de probabilités :



1. (a) $\overline{S} = \left(\overline{S} \cap E_1\right) \cup \left(\overline{S} \cap E_2\right)$ (réunion d'événements incompatibles) donc $p\left(\overline{S}\right) = p\left(\overline{S} \cap E_1\right) + p\left(\overline{S} \cap E_2\right)$
$= 0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,95 = \boxed{0,92}$.
La probabilité pour l'enfant d'avoir un alevin vivant est donc 0,92.

   (b) De même, la probabilité pour l'enfant d'avoir un poisson rouge est égale à
$p(G) = p(G \cap E_1) + p(G \cap E_2) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = \boxed{0,71}$

   (c) Les poissons vivants sont rouge ou gris.
La probabilité d'avoir un alevin gris est donc égale à $0,92 - 0,71 = \boxed{0,21}$.
La probabilité qu'il soit gris et provienne du premier élevage est égale à $p(G \cap E_1) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.
On a donc : $p_G(E_1) = \dfrac{p(G \cap E_1)}{p(G)} = \dfrac{0,09}{0,21} = \dfrac{9}{21} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$.

2. On suppose qu'il y a assez d'alevins pour que la probabilité d'avoir un alevin en vie au bout de trois mois est toujours égale à 0,92.
Notons X le nombre d'alevins en vie au bout de trois mois.
On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $B(5\ ;\ 0,92)$.

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} 0,92^3 \times (1 - 0,92)^2 = 10 \times 0,92^3 \times 0,08^2 \approx 0{,}049 \approx 0,05 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3. On a le tableau de loi de probabilité suivant :

couleur	rouge	gris	mort
probabilité	0,71	0,21	0,08
gain(€)	1	0,25	−0,10

On a donc $\mathrm{E}(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 - 0,08 \times 0,10 = 0,7545 \boxed{\approx 0,75}$.
L'animalerie gagne donc en moyenne environ 0,75 € par alevin vendu.

II Nouvelle-Calédonie mars 2007

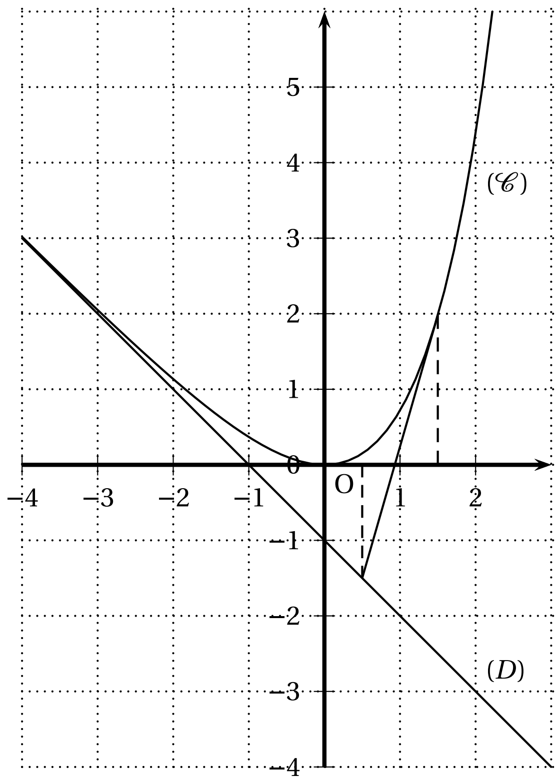
Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

1. L'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x-a)+f(a) \Leftrightarrow y = \left(\mathrm{e}^a - 1\right)(x-a)+\mathrm{e}^a - a - 1 \Leftrightarrow \boxed{y = \left(\mathrm{e}^a - 1\right)x + \mathrm{e}^a(1-a) - 1}$
2. L'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec la droite D est solution de l'équation $\left(\mathrm{e}^a - 1\right)x + \mathrm{e}^a(1-a) - 1 = -x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a x = \mathrm{e}^a(a-1) \Leftrightarrow y = x - 1$ (en simplifiant par $\mathrm{e}^a \neq 0$).
   L'abscisse de de ce point d'intersection est $b = a - 1$.
3. Pour construire la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a, il suffit de construire le point de (D) d'abscisse $a - 1$ et la tangente est obtenue en joignant ce point à M. Exemple ci-dessous avec $a = 1,5$.



Partie B

1. Graphiquement on lit $f(x) \geqslant 0$ ($f(0) = 0$).
2. On a donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

   En appliquant cette inégalité à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\boxed{(1)\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}}$ et, en l'appliquant à $x = -\dfrac{1}{n+1}$, on obtient : $\boxed{(2)\quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}}$.
3. La fonction $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ étant croissante, $(1) \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \iff \mathrm{e} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \iff \boxed{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}}$.
4. De même $(2) \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \mathrm{e}^{-1} \geqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \mathrm{e} \iff \boxed{\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}$.

5. La question 3. montre que e majore $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

La question 4. s'écrit $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \iff \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n+1}{n}\right) \iff \boxed{\frac{n}{n+1}\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

On obtient donc l'encadrement :

$$\boxed{\frac{n}{n+1}\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}.}$$

Par application du théorème des « gendarmes », car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.}$$

Remarque : on a donc trouvé une suite qui a le nombre e pour limite mais la convergence est très lente, donc pas envisageable pour calculer une valeur approchée de ce nombre

III Antilles-Guyane juin 2013

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc, par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$, donc négatif pour $x \leqslant -2$ et nul pour $x = -2$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\mathrm{e}^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

   (b) D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :
   - si $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
   - si $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
   - si $-\frac{1}{\mathrm{e}^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
   - si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points.
2. — La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\mathrm{e}$.

— La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\dfrac{1}{e^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.

— Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = e$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   — si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   — si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   — si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

IV Liban mai 2013

Partie A

1. L?algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
   L?algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
   L?algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_{n-1} et les affiche tous : il manque donc en fait l'affichage de u_n !
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$, il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.
3. (a) Montrons par récurrence la proprieété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   Initialisation: $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
   Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6 - v_n} < \dfrac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
   $\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{6} < \dfrac{9}{6 - v_n} < \dfrac{9}{3} = 3.$
   Ainsi $0 < \dfrac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : Par le principe de récurrence, : $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \boxed{\dfrac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}}$.
   Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est **croissante**.

   (c) Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{6 - v_n}{3v_n - 9} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{6 - v_n - 3}{3v_n - 9} = \dfrac{v_n - 3}{3v_n - 9} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$.
   Ainsi la suite (w_n) est-elle arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.
2. puisque (w_n) est arithmétique, $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{1-3} - \dfrac{1}{3}n = \boxed{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n}$.
   Comme $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \boxed{\dfrac{6}{-3 - 2n} + 3}$.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{-3 - 2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \boxed{3}$.