TS : correction du devoir sur feuille n° 3

I

Partie A

1. (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul,
   $t_{n+1} - t_n = 0,24 t_{n-1} \iff \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1}$
   $\iff \lambda^2 - \lambda = 0,24$, en divisant par $\lambda^{n-1} \neq 0$

   On résout $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$. Après le calcul du discriminant δ, on trouve $\boxed{\lambda = 1,2 \text{ ou } \lambda = -0,2.}$

   Les suites (t_n) appartenant à (E) sont les suites $\boxed{t_n = 0,2^n}$ et $\boxed{t_n = (-0,2)^n}$.
2. u_n doit vérifier :
   $$\begin{cases} \alpha(1,2)^0 + \beta(-0,2)^0 = 6 \\ \alpha(1,2)^1 + \beta(-0,2)^1 = 6,6 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ 1,2\alpha - 0,2\beta = 6,6 \end{cases}}$$
   $\Rightarrow 1,2\alpha - 0,2(6-\alpha) = 6,6 \iff 1,4\alpha = 7,8 \iff \boxed{\alpha = \dfrac{39}{7}}$.

   On en déduit que $\beta = 6 - \alpha = 6 - \dfrac{39}{7} = \boxed{\dfrac{3}{7}.}$

   La suite s'écrit donc : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n}$.
3. Comme $-1 < -0,2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,2)^n = 0$; d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,2)^n = +\infty$ car $1,2 > 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Partie B

1. (a) $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$
   $f'(x) = 1,4 - 0,1x = 0,1(14 - x)$ qui s'annule en 14.
   $f'(x) = 0$ pour $x = 14$ er $f'(x) < 0$ pour $x > 14$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 14$.
   La fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;\,14]$ et décroissante sur $[14\,;\,+\infty[$.
   On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,8]$.

   (b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant< v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

   - **Initialisation** :
     $v_0 = 6,\ v_1 = 1,4v_0 - 0,005v_0^2$
     $= 1,4 \times 6 - 0,05 \times 6^2 = 8,4 - 1,8 = 6,6$.
     On a bien $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 8$.
   - **Hérédité** : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_p < v_{p+1} \leqslant 8$.
     On a $v_{p+2} = f\left(v_{p+1}\right)$. D'après la question précédente la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,14]$;
     donc $0 \leqslant v_p \leqslant v_{p+1} \leqslant 8$
     $\Rightarrow 0 \leqslant f\left(v_p\right) \leqslant f\left(v_{p+1}\right) \leqslant f(8)$
     $\iff 0 \leqslant v_{p+1} \leqslant v_{p+2} \leqslant f(8)$.
     Or $f(8) = 8$. L'hérédité est donc démontrée.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. La question précédente montre que :

— la suite est croissante;
— la suite est majorée par 8

Conclusion : la suite (v_n) converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 8.
On a $v_{n+1} = f(v_n)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$; puisque f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\ell)$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$; par unicité de la limite, on doit donc avoir $f(\ell) = \ell$ donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2 \iff 0,4\ell = 0,05\ell^2$
$\iff \ell = 0$ (impossible car la suite est croissante à partir de 6) ou $\ell = 8$
La suite (v_n) converge vers 8.

II

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé (quelconque) et soit f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

1. (a) f_n est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[$,
$f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(1+x^n)(1+x)^{n-1}}{[(1+x)^n]^2}$
$= \dfrac{(1+x)^{n-1}\left[nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n)\right]}{(1+x)^{2n}} = \dfrac{(1+x)^{n-1}\left(nx^{n-1}-n\right)}{(1+x)^{2n}}$
$= \boxed{\dfrac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n+1}-1\right)}{(1+x)^{2n}}}$

   (b) Fait à la queston précédente

   (c) $f_n'(x)$ est du signe de $x^{n-1}-1$; or, la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et vaut 1 pour $x = 1$. Donc $x^{n-1} - 1 < 0$ pour $x < 1$ et $x^{n-1} - 1 > 0$ pour $x > 1$.
$f(1) = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On en déduit le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{1}{2^{n-1}}$	$\nearrow$	

2. (a) D'après les variations de f, on a :
$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, donc $\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On en déduit : $\boxed{(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+x^n\right)}$.

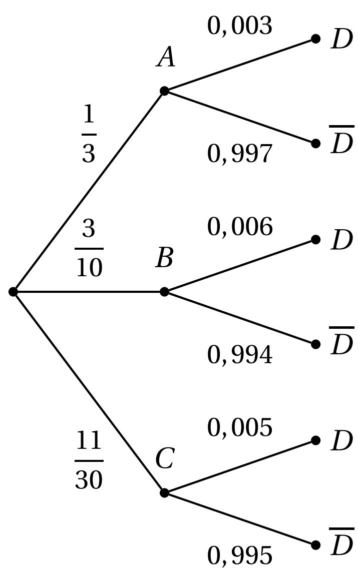
   (b) On pose $A = \dfrac{y}{x}$.
D'après la question précédente, on a : $(1+A)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+A^n\right)$ d'où
$\boxed{\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+\dfrac{y^n}{x^n}\right)}$.
On en déduit : $\left(\dfrac{x+y}{y}\right)^n \leqslant 2^{n-1}\left(\dfrac{x^n+y^n}{y^n}\right)$ d'où $\boxed{(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\left(x^n+y^n\right)}$, en multipliant de chaque côté par $y^n > 0$.

III

Un chirurgien orthopédique commande des prothèses chez trois fabricants A, B et C. le tiers des prothèses provient de A, 30 % provient de B et le reste provient de C.
La proportion de prothèses défectueuses est de 0,3 % chez A, de 0,6 % chez B et de 0,5 % chez C.
On prend au hasard la fiche d'un patient qui s'est fait poser une prothèse chez ce médecin.
Notons :

- A : l'événement : « la prothèse vient du fabricant A »
- B : l'événement : « la prothèse vient du fabricant B »
- C : l'événement : « la prothèse vient du fabricant C »
- D : l'événement : « la prothèse est défectueuse A »

On a : $p(A)=\dfrac{1}{3}$; $p(B)=\dfrac{3}{10}$; $p(C)=1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{10}\right)=\dfrac{11}{30}$
$p_A(D)=0,3\,\%=0,003$; $p_B(D)=0,6\,\%=0,006$ et $p_C(D)=0,5\,\%=0,005$.
On peut traduire la situation par un arbre pondéré.



D'après la f**ormule des probabilités totales**, on a :

$$p(D)=p_A(D)\times p(A)+p_B(D)\times p(B)+p_C(D)\times p(C)=0,003\times\frac{1}{3}+0,006\times\frac{3}{10}+0,005\times\frac{11}{30}=\frac{0,139}{30}=\boxed{\frac{139}{30\,000}}$$

IV

On sait que 1 % d'une population est atteinte d'une certaine maladie orpheline.
On dispose de test de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :

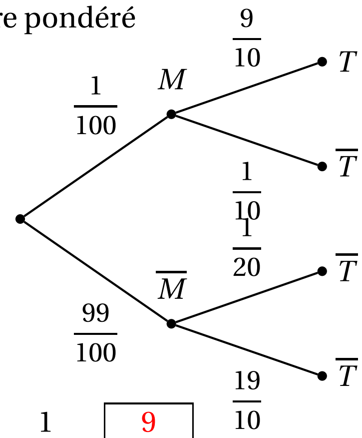
- si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90 % des cas.
- si la personne n'est pas atteinte par cette maladie, alors le test est néanmoins positif dans 5 % des cas.

On choisit une personne au hasard.
On note :

- M l'événement : « La personne est malade. ».
- T l'événement : « Le test est positif. ».

1. On a : $p(M)=\boxed{\dfrac{1}{100}}$; $p_M(T)=\dfrac{90}{100}=\boxed{\dfrac{9}{10}}$; $p_{\overline{M}}(T)=\dfrac{5}{100}=\boxed{\dfrac{1}{20}}$

2. Représentons la situation par un arbre pondéré



3. (a) $p(M \cap T) = p_M(T) \times p(M) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{100} = \boxed{\frac{9}{1000}}$.

   $p\left(\overline{M} \cap T\right) = p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right) = \frac{1}{20} \times \frac{99}{100} = \boxed{\frac{99}{2000}}$.

   (b) Calculos $p(T)$.
   D'après la formule des probabiités totales :
   $p(T) = p_M(T) \times p(M) + p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right) = \frac{9}{1000} + \frac{99}{2000} = \boxed{\frac{117}{2000}}$.

4. La probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif est $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{117}{2000}} = \frac{18}{117} = \boxed{\frac{2}{13}}$

5. La probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif est :
   $p_T(\overline{M}) = 1 - p_T(M) = 1 - \frac{2}{13} = \boxed{\frac{11}{13}}$.

6. La probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie sachant que son test est négatif est :
   $p_{\overline{T}}(M) = \frac{p\left(M \cap \overline{T}\right)}{p\left(\overline{T}\right)} = \frac{p_M\left(\overline{T}\right) \times p(M)}{1 - p(T)} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1883}{2000}} = \boxed{\frac{2}{1883}}$

V

Soit $a \geq 1$ un nombre réel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} + u_n\right)$.

Première partie

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

1. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.
   $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + a \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - a}{x^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)}{x^2}}$.
   $\frac{1}{2} > 0$, $x^2 > 0$, $x + \sqrt{a} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{a}$, c'est-à-dire positif pour $x \geqslant \sqrt{a}$ et négatif pour $x \leqslant \sqrt{a}$.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{a}{x}\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a}{x}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

$f\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{\sqrt{a}}\right) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{} + \sqrt{a}) = \boxed{\sqrt{a}}$.

On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme $a \geqslant 1$, on a $\sqrt{a} \leqslant a$.
   Sur l'intervalle $[\sqrt{a}\,;\, a]$, f est croissante, donc $f\left(\sqrt{a}\right) \leqslant f(a)$.
   $f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$.
   $f(a) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{a}\right) = \dfrac{a+1}{2}$.

   Montrons que $f(a) \leqslant a$.
   $a - f(a) = a - \dfrac{a+1}{2} = \dfrac{a-1}{2} \geqslant 0$ (car $a \geqslant 1$) donc $f(a) \leqslant a$.
   Pour $\sqrt{a} \leqslant x \leqslant a$, on a donc $\sqrt{a} \leqslant f(x) \leqslant f(a) \leqslant a$, donc $\boxed{f(x) \in \left[\sqrt{a}\,;\, a\right]}$.

3. (a) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a$.
   - **Initialisation** $u_0 = a$; $u_1 = f(u_0) = f(a) \leqslant a$ donc $\sqrt{a} \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant a$.
   - **Hérédité** : Supposons $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a$ pour un n quelconque.
     Sur $\left[\sqrt{a}\,;\, +\infty\right[$, f est croissante, donc $\sqrt{a} \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(a) \leqslant a$, donc $\sqrt{a} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant a$.
     La propriété est donc **héréditaire**.

   D'après l'axiome de récurrence, pour tout n, $\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant a$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.

   (b) On a montré dans la question précédente que $\sqrt{a} \leqslant u_n$ pour tout n, donc la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$.

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc **convergente** vers une limite ℓ.

4. f est continue, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
   $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + a}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 + a = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$, donc $\ell = \pm\sqrt{a}$.
   La suite étant positive (facile à montrer par récurrence), la limite est $\boxed{\ell = \sqrt{a}}$.

Deuxième partie : vitesse de convergence

On prend désormais $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ et on pose $v_n = u_n - \sqrt{2}$.
v_n mesure donc l'écart entre u_n et $\sqrt{2}$.

1. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{u_n + 2}\right) - \sqrt{2} = \dfrac{2 + u_n^2}{2u_n} - \sqrt{2} = \dfrac{2 + u_n^2 - 2\sqrt{2}}{2u_n}$
   $= \dfrac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n} = \boxed{\dfrac{v_n^2}{2u_n}}$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n \leq \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

- **Initialisation** : $v_1 = \dfrac{v_0^2}{2v_0} = \dfrac{\left(u_0 - \sqrt{2}\right)^2}{2u_0} = \dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{4} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0,09$.
  $\dfrac{1}{2^{2^1}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ donc $v_1 \leqslant \dfrac{1}{2^{2^1}}$.
  La propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité** : supposons la propriété vraie à un rang n quelconque.
  Par conséquent : $v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n}}$.
  Alors : $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n} = \dfrac{1}{2u_n} \times v_n^2$.
  $v_n^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)^2 = \dfrac{1}{2^{(2^n \times 2}} = \dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$.
  On sait d'après la première partie que $u_n \geqslant \sqrt{2}$, donc $2u_n \geqslant 2\sqrt{2} \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{2u_n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant 1$.
  On en déduit, par produit : $v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$. La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

3. À la calculatrice, on cherche une valeur de n telle que $\dfrac{1}{2^{2^n}} \leqslant 10^{-9}$.

On trouve que $\dfrac{1}{2^{2^5}} \approx 2,3 \times 10^{-10}$.

On est donc sûr que u_5 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.

Remarque : on dit que la vitesse de convergence est quadratique : le nombre de décimales exactes double environ à chaque itération.
Cette suite est due au mathématicien Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C.)