TS : contrôle n° 1
(1 heure)

I (3 points)

Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

II (6 points)

Calculer, en justifiant, les limites des suites (u_n) définies par :

1. $u_n=\dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$
2. $u_n=\dfrac{3n}{n+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$
4. $u_n=5^n-4^n$

III (5 points)

On pose $u_1=\dfrac{1}{2}$ et pour tout n non nul $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. On pose $v_n=\dfrac{u_n}{n}$ pour n non nul.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n avec n non nul.
   (c) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n}=+\infty$; en déduire la limite ℓ de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$

IV (6 points)

u et v sont deux suites définies par $u_0=20$, $v_0=60$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{4} \text{ et } v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{4}$$

a) Montrer que les suites $u+v$ et $v-u$ sont géométriques.

b) Exprimer u_n+v_n et v_n-u_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite chaque suite u et v.