TS : contrôle (suites, limites de fonctions, géométrie dans l'espace) (durée : 2 heures)

I

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2(n+4) = n^3+6n^2+9n+4$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \dfrac{1}{1\times2\times3} + \dfrac{1}{2\times3\times4} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

II Vrai ou Faux ?

$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et **justifier** rapidement par une propriété ou un contre-exemple, éventuellement graphique.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale.
2. Si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$, alors l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.
3. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
4. Si pour tout réel de $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{-x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. Si, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,0[$, $x^3+1 \leqslant f(x)$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
6. Si f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et si f est telle que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

III Calcul de limites

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{2+3x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{9x^2+1}{x^2-4x+5}\right)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(\dfrac{x}{4-x^2}\right)$

IV Vrai ou faux ?

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.
2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
3. Si la suite (u_n) est croisante, alors (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

V

On considère un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [BF], [EH] et [HD].
Dans chaque cas, donner la position relative des droites ou plans considérés :

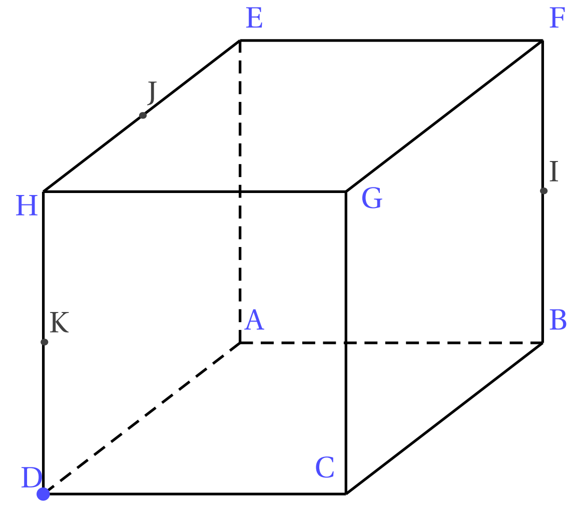
a) les droites (DG) et (EA)

b) les droites (JK) et (ED)

c) le plan (EFC) et la droite (JK)

d) les plans (GHK) et (AIC)

e) les droites (FK) et (BD)



VI

On considère un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [EF], [EH] et [HD].

1. Préciser les intersections du plan (IJK) avec les plans (EFG) et (AED).
2. Les droites (JK) et (AE) sont sécantes en un point L. Justifier que les plans (IJK) et (AEB) sont sécants selon la droite (IL).
3. Montrer que les plans (IJK) et (CDG) sont sécants selon une droite parallèle à la droite (IL).

Question bonus : En déduire la section du cube par le plan (IJK)