TS : exercices de géométrie

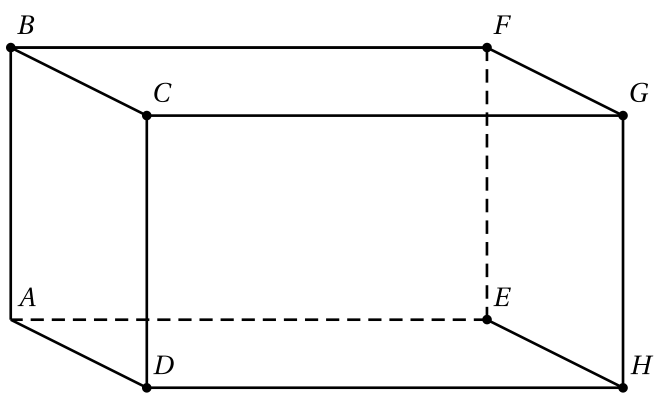
I

Partie A

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère les points A$(3\,;\,-2\,;\,2)$, B$(6\,;\,1\,;\,5)$ et C$(6\,;\,-2\,;\,-1)$.
Déterminer par des calculs la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant avec soin.

- Affirmation 1 : les plans (HAE) et (BGC) se coupent selon la droite parallèle à (HA) passant par F.
- Affirmation 2 : les droites (BE) et (FG) sont orthogonales.
- Affirmation 3 : on appelle I le milieu du segment [EH]. La section du parallélépipède par le plan parallèle à (EGB) passant par I est un trapèze (un tracé suffit à justifier la réponse).

Partie C

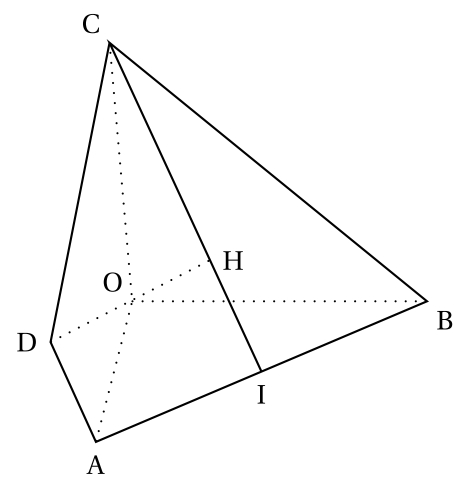
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$.
Donner les coordonnées de B, E, G et I.

II Bac S Métropole juin 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par
$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. (a) Démontrer que (CI) et (AB) sont orthogonales.
   (b) Démontrer que (OI) et (AB) sont orthogonales.
   (c) En déduire que (AB) est orthogonale au plan (OIC).
   (d) En déduire que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
   (e) Démontrer alors que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   (a) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   (b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH $= a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OA}},\,\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OB}},\,\dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.
   (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\,\dfrac{a}{3},\,\dfrac{a}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arÊtes ont mÊme longueur).
   (c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.