TS : correction du TD sur les limites de fonctions (1)

I

Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2-3x+5\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+5\right)$.
On a une forme indéterminée en $+\infty$, par en $-\infty$.
On met en facteur le terme de plus haut degré.
Pour $x\neq 0$, $2x^2-3x+5=x^2\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\$pm\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)=2$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=+\infty}$

Rappel : Pour $a\neq 0$, la courbe représentative de la fonction $f\mapsto ax^2+bx+c$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$ puisque $ax^2+bx+x=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.
On en déduit que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont égales.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}\right)$.
On a une forme indéterminée ; on met en facteur le terme du plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur.
Pour $x\neq 0$, $\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}=\dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\dfrac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(3+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$.
$\lim\limits_{x\to\pm}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)=3$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)\right)=+\infty$.
Par quotient, on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x^2+5x+9}\right)=0}$

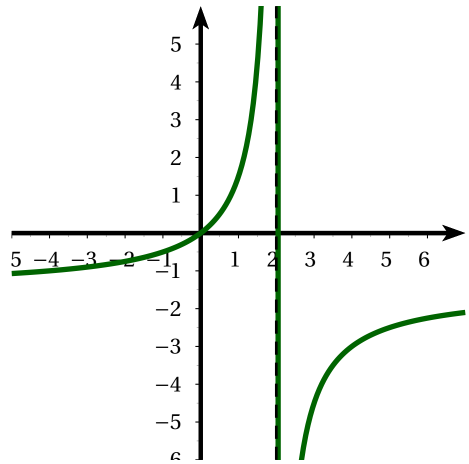
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{3x+1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{3x+1}\right)$.
Même méthode :
Pour $x\neq 0$, $\left(\dfrac{x^2+4}{3x+1}\right)=\dfrac{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=x\times\dfrac{1+\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x}}$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1+\frac{4}{x}}{3+\frac{1}{x}}\right)=\dfrac{1}{3}$.
On voit que la limite est celle de x.
On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{3x+1}\right)=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{3x+1}\right)=+\infty}$

II

Déterminer les limites suivantes :

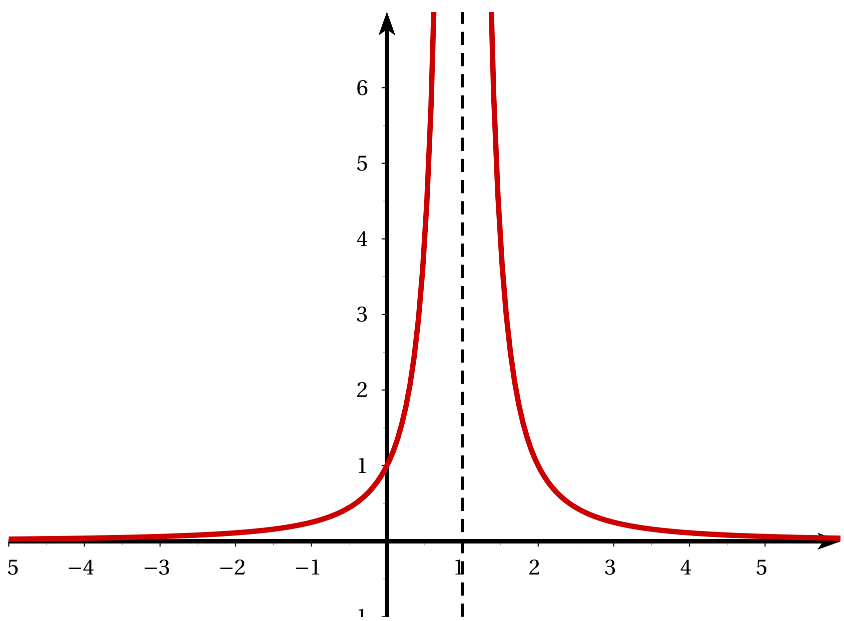
a) $\lim\limits_{x\to 2}(-3x)=-6$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2x-4)=0$ avec $2x-4>0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{-3x}{2x-4}\right)=-\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(-3x)=-6$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(2x-4)=0$ avec $2x-4<0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{-3x}{2x-4}\right)=+\infty}$.
On peut vérifier en traçant à la calculatrice ou avec un ordinateur la courbe représentative de cette expression.



c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{(x-1)^2} \right)$

$\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ avec $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{(x-1)^2} \right) = +\infty}$.



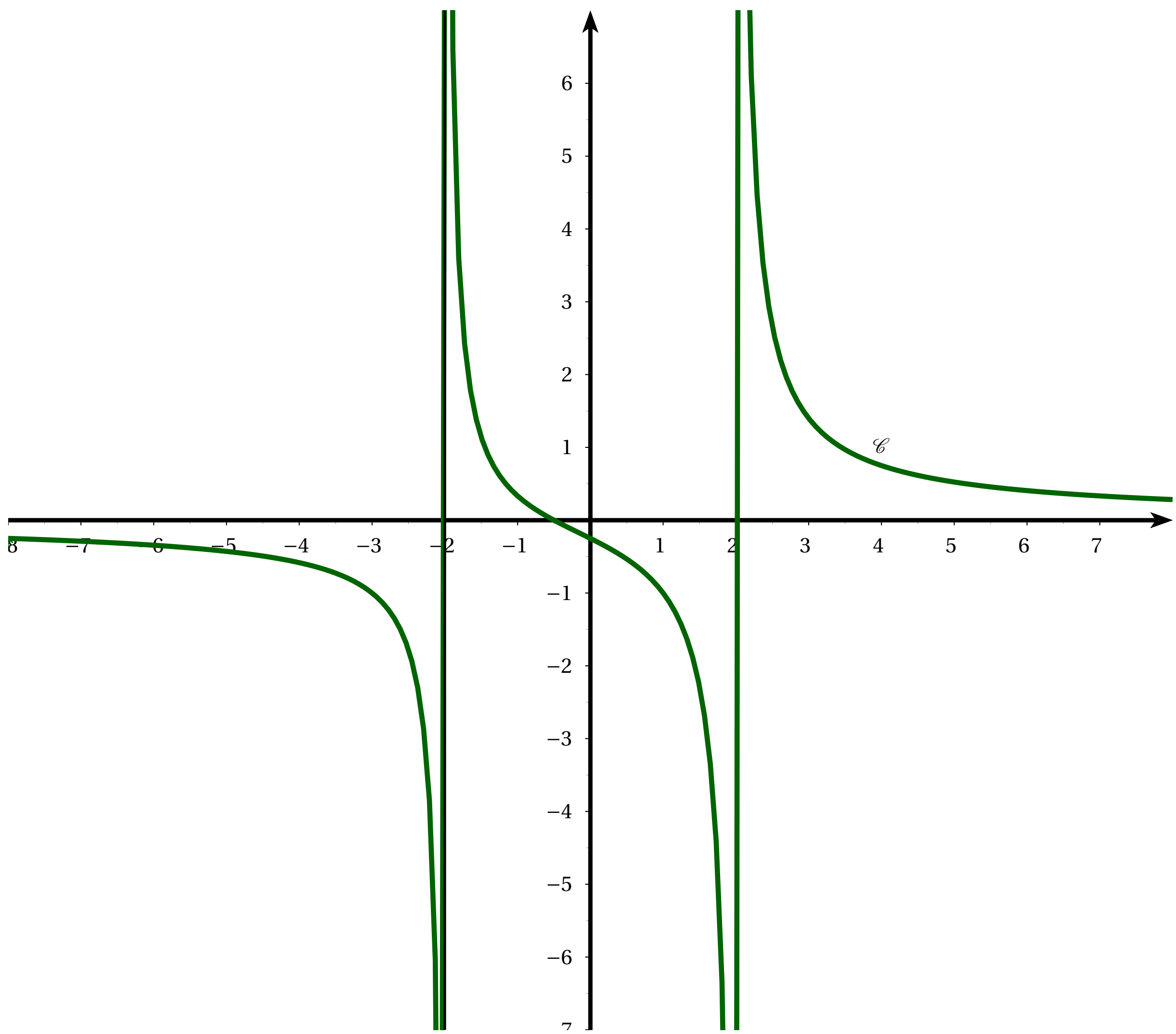
III

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

1. $x^2 - 4$ s'annule en -2 et 2 donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$.
2. Les bornes de l'ensemble de définition sont $-\infty$, -2, 2 et $+\infty$.
   - Limite en $-\infty$:
     Pour $x \neq 0$, $\dfrac{2x+1}{x^2-4} = \dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}$.
     $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)\right) = -\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = 0}$.
   - Liite en $+\infty$: mêmes calculs et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = 0}$.

- Limite en -2 :
  $\lim\limits_{x \to -2} (2x+1) = -3.$
  $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2-4\right) = 0$. La limite du quotient va donc dépendre du signe du dénominateur.
  $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \left(x^2-4\right) = 0$ avec $x^2-4>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = -\infty$ (quotient de deux nombres de signes contraires).
  De même :
  $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \left(x^2-4\right) = 0$ avec $x^2-4<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = +\infty$ (quotient de deux nombres négatifs).
- Limite en 2 :
  $\lim\limits_{x \to 2} (2x+1) = 5.$
  $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2-4\right) = 0$. La limite du quotient va donc dépendre du signe du dénominateur.
  $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<2}} \left(x^2-4\right) = 0$ avec $x^2-4<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<2}} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = -\infty$ (quotient de deux nombres de signes contraires).
  De même :
  $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>-2}} \left(x^2-4\right) = 0$ avec $x^2-4>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>2}} \left(\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right) = -\infty$ (quotient de deux nombres de signes contraires
).

Vérification graphique :



IV

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}=\frac{\left[\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right]\times\left[\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}\right]}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$=\frac{\left(x^2-4x+3\right)-\left[x^2-3x+2\right]}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2}\left[\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$$

Pour $x<0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ donc, pour $x<0$,

$$f(x)=\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{2}}$.

Pour >0, $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Alors : $f(x)=\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\left[\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\right]}$

On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}}$.

Vérification graphique :