Limite de la composée de deux fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions, donc les ensembles de définition sont $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
On suppose que pour $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ appartient à $\mathscr{D}_g$.
On appelle composition de f suivie de g la fonction notée $g \circ f$ l fonction définie, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ par $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$.
$g \circ f : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

Exemple : soient f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 3x + 1$.
Alors :

- $g \circ f : x \xrightarrow{f} \underbrace{x^2 + 1}_{y} \xrightarrow{g} 3y + 1 = 3\left(x^2 + 1\right) + 1$
- $f \circ g : x \xrightarrow{g} \underbrace{3x + 1}_{z} \xrightarrow{f} z^2 + 1 = (3x + 1)^2 + 1$

Question : a-t-on $f \circ g = g \circ f$?

I

Pour chacun des cas suivants, donner les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \sin x$ et $g(x) = 3x^2 + 1$
3. $f(x) = 3x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$

II

Dans chacun des cas suivants, écrire la fonction h sous la forme de la composée de deux fonctions à préciser :

1. $h(x) = \dfrac{1}{x^4 + 3}$
2. $h(x) = \cos\left(x^2 + 1\right)$
3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$
4. $h(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^5$

Exercice :

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x + 1}{x - 1}}$.

III Limite de la composée de deux fonctions

Propriété

f et g désignent deux fonctions.
a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Alors : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

Exemple

Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1$ par

$$h(x) = \sqrt{1 - x}.$$

On cherche la limite en $-\infty$.
On pose $X = 1 - x$; ainsi $h(x) = \sqrt{X}$.
$h : x \mapsto 1 - x \mapsto \sqrt{1 - x}$.
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$ (avec $X = 1 - x$) donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$