TS : contrôle (limites, continuité, espace) (2 heures)

I Continuité (2,5 points)

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un réel de I.
   Que signifie mathématiquement que f est continue en a ?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4} \text{ si } x \neq 4 \\ f(4) = 8 \end{cases}$$
   Montrer que f est continue en 4.

II Calcul de limites (3 points)

1. Étudier la limite de $f(x) = 5x^3 - 3x + 4$ en $+\infty$.
2. Étudier la limite de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ en $-\infty$, $+\infty$ et en 1.

III (2 points)

Soit f une fonction telle que, pour tout $x > 1$,
$$\frac{3x+\cos x}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3x+7}{x-1}.$$
f a-t-elle une limite en $+\infty$? Justifier soigneusement.

IV (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $I = [-1\,;\,3]$ par
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

1. Calculer l'expression de $f'(x)$, dérivée de f.
2. En déduire le tableau de variation de f sur I.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
4. Donner un encadrement de α sur I.

V (4 points)

1. Soit g la fonction définie sur [-3; 3] par
$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur [-3; 3].
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur [-3; 3] et en donner une valeur approchée à 0,01 près.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ sur [-3; 3].
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$ sur $[-3\,;\,-1[\cup]1\,;\,3]$.
   (a) Démontrer que, pour $x \neq -1$,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{\left(x^3+1\right)^2}.$$
   (b) Étudier la limite de $f(x)$ en $-\infty$, en $+\infty$ et en -1.
   (c) Donner le tableau de variation de f.

Pour la suite, l'espace est muni d'une repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

VI (2 points)

On considère les points A$(2\,;\,3\,;\,)4)$ et B$(1\,;\,5\,;\,0)$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

VII (3 points)

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont les deux plans d'équations cartésiennes :
$\mathscr{P} : x+3y-2z+3=0$; $\quad \mathscr{P}' : 2x-4y+z+1=0$.

1. Démontrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite que l'on note $\mathscr{D}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice facultatif (2 points)

n est un entier naturel non nul.
Démontrer que l'équation $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ a une racine comprise entre $\dfrac{2n}{n+1}$ et 2.