

*Si l'esprit d'un homme s'égaré, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. (Francis Bacon)*

**I**

Démontrer qu'une suite croissante et convergente vers un réel  $\ell$  est majorée par  $\ell$ .

**II**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$ .

1. Rappeler pourquoi les nombres  $\cos n$  sont-ils bornés?
2. En déduire que cette suite est convergente et a pour limite 0.

**III**

$(u_n)$  est une suite convergente.

La suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  est-elle alors convergente?

**IV**

On considère une suite arithmético-géométrique  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels non nuls et  $a \neq 1$ .

1. Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto ax + b$ . Déterminer son point fixe, c'est-à-dire la solution  $\beta$  de l'équation  $f(x) = x$ .
2. Puisque  $\beta$  est le point fixe de  $f$ , on a :  $\beta = a\beta + b$ .

On définit alors une suite auxiliaire  $(v_n)$  par

$$v_n = u_n - \beta \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ . On précisera son premier terme en fonction de  $u_0$ .

3. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. **Application** : soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 7 \end{cases}$$
 Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
5. Cette suite est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

**V Suites mêlées**

On considère les suites mêlées  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_0 = -10, v_0 = 20$  et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,7u_n + 0,8v_n \\ v_{n+1} = 0,8u_n + 0,7v_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Calculer  $u_1, v_1, u_2$  et  $v_2$ .  
(b) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont-elles arithmétiques? géométriques?
2. (a) Montrer que la suite  $(a_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $a_n = u_n + v_n$  est géométrique.  
(b) En déduire le terme général de  $(a_n)$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .
3. (a) Montrer que la suite  $(b_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $b_n = u_n - v_n$  est géométrique.  
(b) En déduire le terme général de  $(b_n)$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .  
(c) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont-elles convergentes?
4. Déduire des questions précédentes les termes généraux de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
5. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ .

**VI**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et telle que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1. (a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 < u_n$ .
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n, u_n < 1$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ .  
(a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3.  
(b) Exprimer pour tout entier naturel  $n, v_n$  en fonction de  $n$ .  
(c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a : 
$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}.$$
  
(d) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .