Révisions (2)

Amérique du Nord mai 2019

Exercice I — 5 points

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.
   (a) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

   On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

   (b) L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1.

   Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

2. Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient a Intervalle $[298 ; 302]$. Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable.

   On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de 250 tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».

   (a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

   (b) Décide-t-on de réviser la machine? Justifier la réponse.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaine de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2.

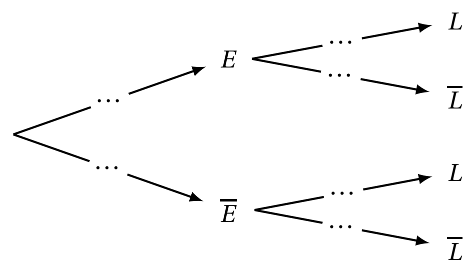
Une étude menée sur la production a permis de constater que :

— 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ;
— parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
— 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements :

— E : « l'épaisseur du tube est conforme » ;
— L : « la longueur du tube est conforme ».

On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



1. Recopier et compléter entièrement cet arbre.
2. Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,948.

Exercice II — 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $Z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2 : Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

Affirmation 3 : Un point M d'affixe z tel que $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Affirmation 4 : L'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice III — 6 points

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on définit la fonction f par

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.

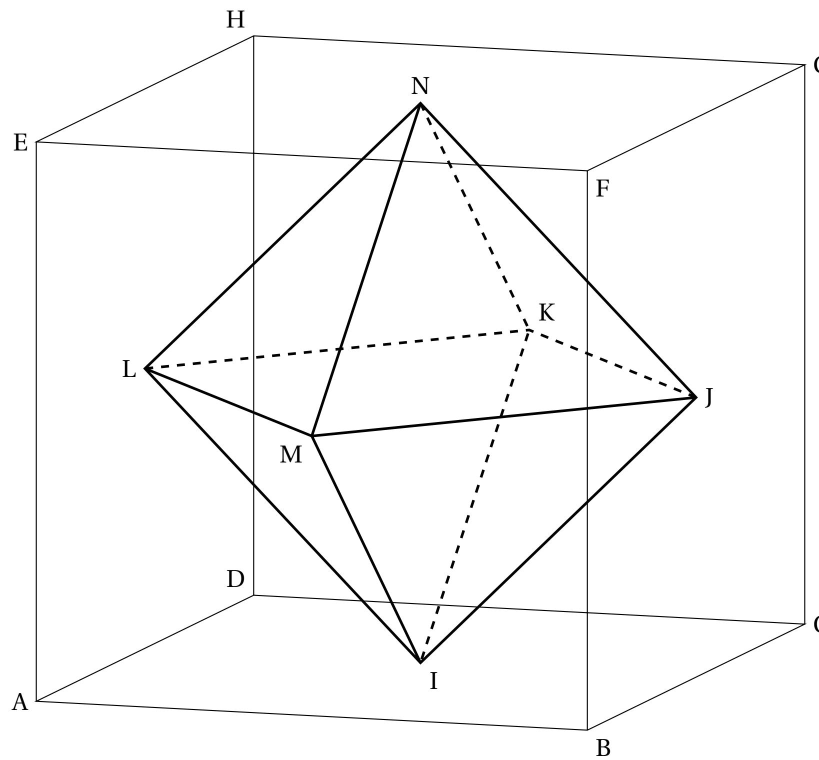
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.
4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice IV — 5 points

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

1. (a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

   (b) En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

   (c) Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).
2. (a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

   (b) La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

   (c) Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

Liban mai 2019

Exercice V **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$,

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1).$$

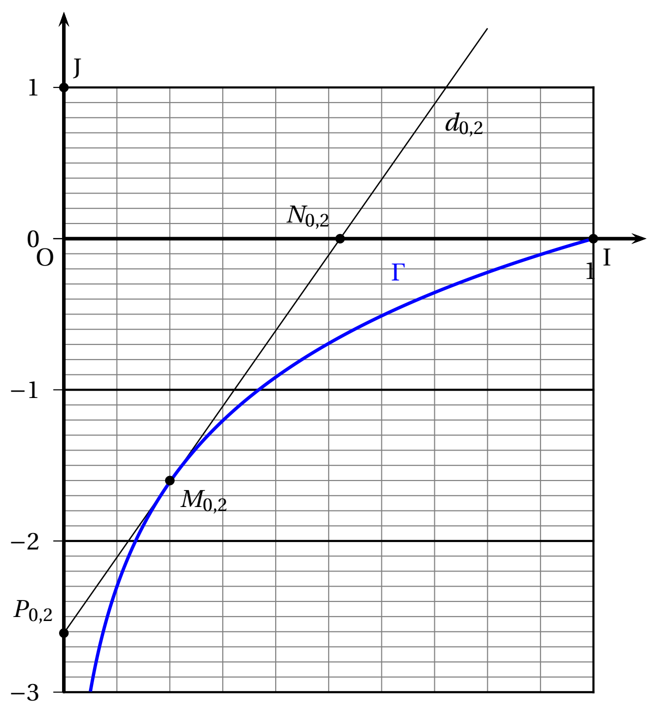
   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

   On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.

   Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

   On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



   (a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

   (b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice VI **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point 0 et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + \mathrm{i}$ et $z_B = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A$'$ image du point A par la fonction f.

   (b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B$'$ image du point B par la fonction f.

   (c) Sur la copie, placer les points A, B, A$'$ et B$'$ dans le repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. Pour les points B et B$'$, on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   (a) Montrer que $z' = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

   (b) Est-il vrai que si un point M, distinct de 0, appartient au disque de centre 0 et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

   (b) Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

   (c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

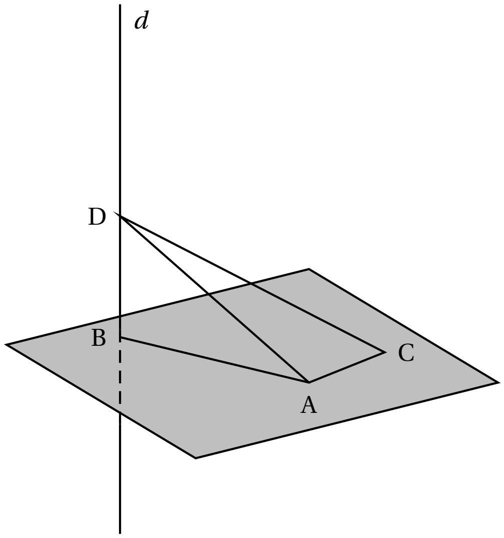
Exercice VII **6 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.

Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

resume Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

resume (a) Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

(b) On note 1 le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; −5) et la droite d de

représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t+1\\ y &=& -2t+9\\ z &=& t-3\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1),
3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.
   (a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.
   (b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.
   (c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9; 1; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.

En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties 1 et 2 sont indépendantes.

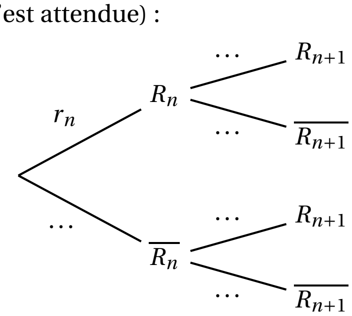
Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :
- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.
   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.
   (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



   (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
   (d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.