Résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Table des matières

I Méthode par combinaisons ou élimination 1
II Méthode par substitution 2
III Exercices 2
III.1 2
III.2 3
III.3 3
IV Exercices sur le site Euler 3
IV.1 Exercices guidés : 3
IV.2 Exercices d'apprentissage 3
IV.3 Générateur d'exercices 3

I Méthode par combinaisons ou élimination

On considère un système de deux équations à deux inconnues du type $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$.

Principe de la méthode

- Pour résoudre ce système par la méthode par combinaisons, on multiplie chacune des deux équations par un nombre pour obtenir le même coefficient pour x **ou** pour y (au signe près). (même principe que pour obtenir le dénominateur commun de deux fractions).
- On ajoute alors ou on soustrait les deux équations obtenues pour faire disparaître une des inconnues.
- On résout alors l'équation obtenue, ce qui donne la valeur d'une des inconnues.
- On procède de même pour trouver l'autre inconnue ou on remplace dans une des équation l'inconnue trouvée et on résout l'équation obtenue.

Exemple 1

A la boulangerie, un client demande « 4 baguettes et 5 croissants ». Il paie 11,9 €.
Un autre client demande « 2 baguettes et 3 croissants ». Il paie 6,7 €.
Combien vaut une baguette et combien vaut un croissant ?

- On appelle x le prix d'une baguette et y celui d'un croissant (en euros).
  Traduisons chacun des renseignements par une équation à deux inconnues : On obtient

$$\begin{cases} 4x+5y=11{,}9 & L_1 \\ 2x+3y=6{,}7 & L_2 \end{cases}$$

Essayons d'obtenir le même coefficient pour x ; on multiplie L_1 par 1 (donc on garde L_1) et L_2 par 2. On obtient :

$$\begin{cases} 4x+5y=11{,}9 & L_1 \\ 4x+6y=13{,}4 & L_3=2\times L_2 \end{cases}$$

On soustrait alors la première ligne à la deuxième :

L_3-L_1 : $(4x+6y)-(4x+5y)=13,4-11,9$ qui donne :

$4x+6y-4x-5y=1,5$ d'où $\boxed{y=1,5}$.

Pour calculer x, on peut par exemple remplacer y par 1,5 dans une des équations de départ, ar exemple la deuxième :

$2x+3\times 1,5=6,7$ d'où $2x+4,5=6,7$ soit $2x=2,2$ qui donne $\boxed{x=1,1}$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=[\{1,1\ ;\ 1,5)\}}$

Une baguette coûte 1,10 € et un croissant 1,5 €.

Exemple 2 :

on veut résoudre : $\begin{cases} 3x-5y=-9 & L_1 \\ 4x+7y=29 & L_2 \end{cases}$

Un multiple commun à 2 et 4 (coefficient de x) est 12 ; on multiplie par ce qu'il faut pour obtenir $12x$ aux deux équations.

$\begin{cases} 12x-20y=-36 & L_1\times 4 \\ 12x+21y=87 & L_2\times 3 \end{cases}$

On soustrait les deux lignes :

On obtient : $-41y=-123$ d'où $y=\dfrac{-123}{-41}=3$.

On remplace alors y par 3 dans une des équations initiales (calculs plus simples) : $3x-5y=-9$ donc $3x-5\times 3=-9$ d'où $3x=6$ d'où $x=2$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{(2\ ;\ 3)\}}$

II Méthode par substitution

Principe : à partir d'une des deux équations, on exprime une inconnue en fonction de l'autre et on remplace alors dans l'autre équation.

On obtient alors une équation à une seule inconnue que l'on résout, puis on calculer la valeur de l'autre inconnue.

⚠N'utiliser cette méthode que si la substitution n'entraîne pas de calculs avec des fractions.

Exemple : Soit le système $\begin{cases} 3x+2y=5 & L_1 \\ x+3y=12 & L_2 \end{cases}$

a) On voit que dans la deuxième équation, on peut facilement exprimer x en fonction de y :
$x=12-3y$.

b) On remplace alors x par $12-3y$ dans la première équation :
On obtient : $3(12-3y)+2y=5$, soit $36-9y+2y=5$, donc
$-7y=-31$ qui donne $y=\dfrac{31}{7}$.
Or, $x=12-3y$ donc $x=12-3\times\dfrac{31}{7}=\dfrac{84-93}{7}=-\dfrac{9}{7}$.

c) On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{9}{7} ; \frac{31}{7}\right\}}$

III Exercices

III.1

Résoudre avec la méthode par combinaisons le système suivant : $\begin{cases} 3x+5y=34 \\ 7x-2y=11 \end{cases}$

III.2

On paie une somme de 170 € avec 21 billets, les uns de 10 € et les autre de 5 €.
Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

III.3

On considère les fonctions affines $f : x \mapsto 2x+3$ et $g : x \mapsto -5x+7$ dont les représentations graphiques sont les droites (d) et (d').
Trouver les cordonnées du point d'intersection éventuel de (d) et (d').

IV Exercices sur le site Euler

Cliquer sur le titre pour accéder au site :

IV.1 Exercices guidés :

- Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues et à coefficients entiers
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine dont la représentation graphique est donnée
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux entiers relatifs et leur image entière
- Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues et à coefficients donnés en écriture fractionnaire
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux nombres en écriture fractionnaire et leu

IV.2 Exercices d'apprentissage

- Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de deux droites
- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues

IV.3 Générateur d'exercices

- Résolution de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues
- Expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux nombres en écriture fractionnaire et leur image donn