

Exercice II

4 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

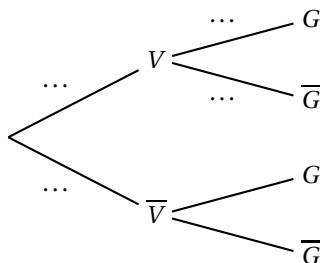
- 40 % de la population est vaccinée;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe »;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. (a) Donner la probabilité de l'évènement G .
(b) Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
(a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
(b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
3. On interroge un échantillon de 3 750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3 750$.

On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X - 1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1 450 et 1 550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

Exercice III

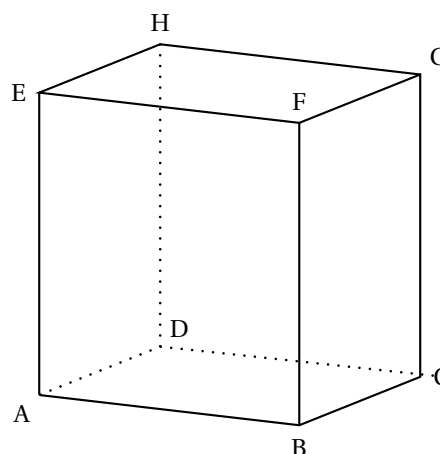
5 points

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, la hauteur issue de M est la droite passant par M orthogonale au plan (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.



On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
(a) Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
(b) Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
(a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
(b) En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

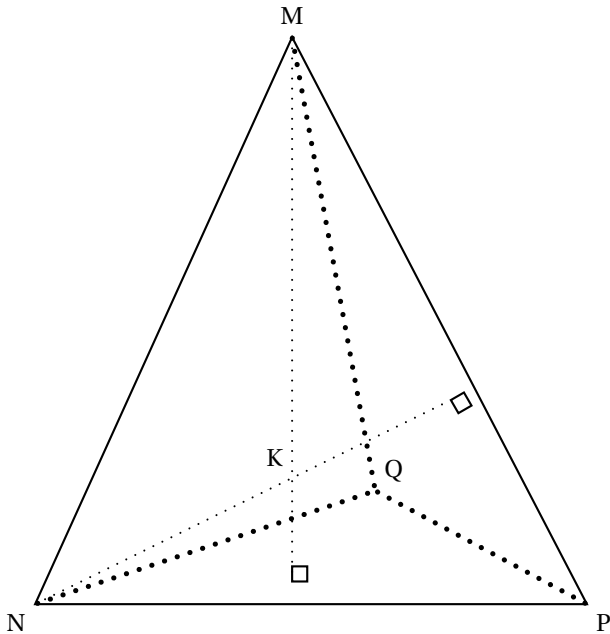
- (c) Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.

Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



- (a) Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.

(b) Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.
- Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales. Ainsi, on obtient la propriété suivante :
Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
(On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3 ; 5 ; 2), S(1 ; 4 ; -2), T(4 ; -1 ; 5) \text{ et } U(4 ; 7 ; 3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

Exercice IV

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

- (a) Vérifier que :

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

- (b) En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

(c) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.
- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}.$$

- (b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$. Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n) .
- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k ,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

En déduire que, pour tout entier naturel k , on a l'égalité : $A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} O A_{k+1}$.

- (b) Pour tout entier naturel n , on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.