TS : exercices de type bac sur les nombres complexes

I

Préambule Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. Soient $\Omega(a\,;\,b)$ un point fixe et $M(x\,;\,y)$ un point variable et soit $r > 0$ un nombre réel. Trouver, en utilisant la définition d'un cercle de centre Ω et de rayon r, une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}(\Omega\,;\,r)$.
2. Réciproquement : une équation du type

$$x^2 + ax + y^2 + bx + c = 0$$

est-elle toujours une équation cartésienne de cercle ?

À tout nombre complexe z différent de $-2\mathrm{i}$, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$, x et y réels.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
On vérifiera que $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.
2. En déduire
— l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que Z est réel.
— l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que Z est imaginaire pur.

II Polynésie juin 2015

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, ~~puis sous forme exponentielle~~.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

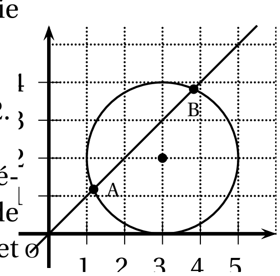
III Centres étrangers juin 2015

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;\,2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



1. Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.
indication : En appelant a le nombre $\sqrt{3}+\mathrm{i}$, calculer a^3 puis a^6.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points E (2 ; 1 ; - 3), F (1 ; -1 ; 2) *et* G (-1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.