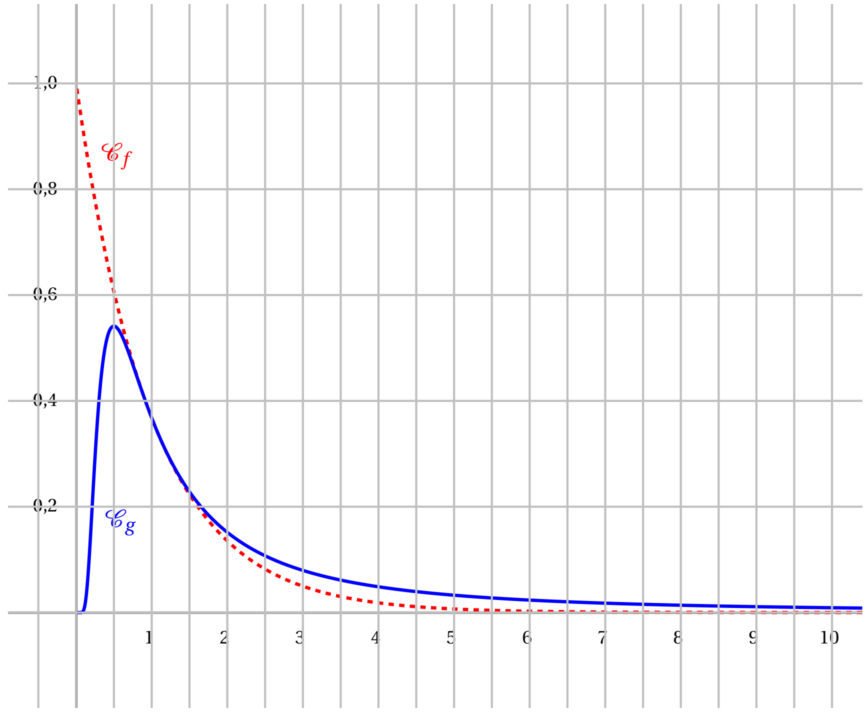
Exercices de type bac - intégration

I Nouvelle Calédonie novembre 2018

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A - Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x)=g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x)=0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction *g*

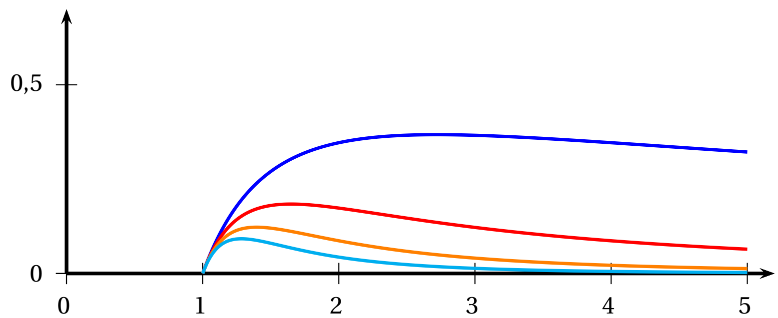
1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\ln\big(g(x)\big)$.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $h(x)=\dfrac{-1-2x\ln x}{x}$
   (b) Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que
$$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\text{x} = \mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.$$
3. Démontrer que
$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x = 1-2\mathrm{e}^{-1}.$$
4. On admet que
$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(f(x)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$
   Interpréter graphiquement cette égalité.

II Liban mai 2018

On considère, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle [1 ; 5J par :
$$f_n(x)=\frac{\ln x}{x^n}.$$
. Pour tout entier $n>0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n>0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:
$$f_n'(x)=\frac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$
2. Pour tout entier $n>0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
   On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
   Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation
$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$
3. (a) Montrer que, pour tout entier $n>1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:
$$0\leqslant\frac{\ln(x)}{x^n}\leqslant\frac{\ln(5)}{x^n}.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $n>1$:
$$\int_1^5\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right).$$
   (c) Pour tout entier $n>0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x=1$, $x=5$, $y=0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
   Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

III Métropole, juin 2017

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
   (a) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$$
   où h' désigne la fonction dérivée de h.
   (b) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction
   $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

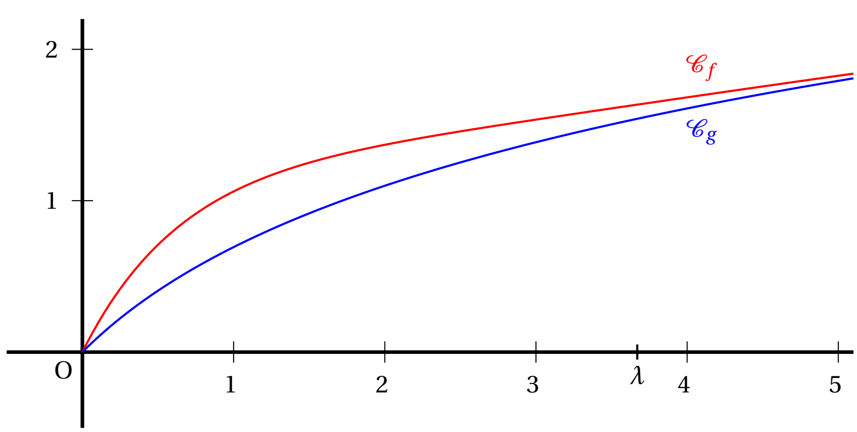
Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées ci-dessous

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\,;\,g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   (a) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
   (b) Placer sur le graphique fourni en annexe page 4 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
   (a) Hachurer le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page 4.
   (b) On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :
   $$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}}.$$
   (c) Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.



3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1-\dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}}<S$ faire
	$\quad$ λ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

(a) Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S=0,8$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

IV Antilles-Guyane septembre 2017

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1~;~+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1~;~+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1~;~+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0=\dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a
$$0\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).