Exercices de bac (loi exponentielle et loi normale)

I Liban mai 2018

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.

Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.

Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.

Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.

Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   (a) Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
   (b) Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.

   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

II Amérique du Nord mai 2018

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X) = 5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $G(t) = (-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.
   Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x} = 0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.

Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.

Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2\ \text{min}^{-1}$.
   (a) Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
   - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
   - parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

   On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :

   B : « le client paye à une borne automatique » ;

   $\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

   S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

   Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

   Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?