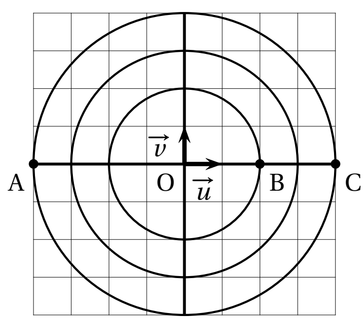
Exercices de bac

I Pondichéry mai 2018

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=\mathrm{j}a$, $b'=\mathrm{j}b$ et $c'=\mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.
   En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.
   (b) Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en **Annexe**.
   Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.
2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.
3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.



II Liban mai 2018

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n=(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n.$$

   (a) Déterminer la forme trigonométrique de S_n.
   (b) *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n=0$.

III Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1\quad\text{et}\quad z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   (c) Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R>P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

   (a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0,5$?
   (b) Pour $P=0,01$ on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme?
4. (a) Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.
   (b) On admet que $z_n=r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   (c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.