# Exercices sur le théorème des valeurs intermédiaires

## I

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

1. Montrer que la fonction $f$ est continue sur $[-1 ; 2]$.
2. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans $[-1 ; 2]$.

## II

Soit $f$ est la fonction définie sur l'intervalle [-3; 6] par $f(x) = x^3 - 12x$.

1. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f$.
2. Pourquoi l'équation $f(x) = 30$ a-t-elle des solutions dans l'intervalle [-3; 6] ?
3. Combien cette équation a-t-elle de solutions ?
4. En donner une approximation d'amplitude $10^{-2}$, en utilisant la calculatrice.

## III

Ň est définie et continue sur $I = [-4 ; 1]$ par $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 3$.

1. (a) Étudier les variations de $f$.
   (b) En justifiant votre réponse, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ dans $I$.
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique, $\alpha$, dans l'intervalle $I$.
   (b) Déterminer un encadrement de $\alpha$ entre deux entiers consécutifs (en justifiant votre réponse).
   (c) Déterminer une valeur approchée par excès de $\alpha$ au millième près (en justifiant votre réponse).
3. On admet que l'équation
$$f(x) = 0$$
admet une solution unique $\beta$ dans [-3; -1]. Déterminer un encadrement de $\beta$ à $10^{-2}$ près (en justifiant la réponse).

## IV

Montrer que l'équation $\dfrac{2x^3 - 1}{3x^2 + 1} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.