TS : exercices sur la dérivation

I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de g.
2. Montrer que g est continue en 0.
3. La fonction g est-elle dérivable en 0 (on pourra poser $h = x^2$). Interpréter graphiquement.
4. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement.

II

Soient les fonctions f et g définies sur $]-\infty\,;\,0[$ par :

$f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \dfrac{3}{x}$.

Démontrez que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent des tangentes parallèles au point d'abscisse -1.

III

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathscr{D}$; déterminer sa fonction dérivée.

a) $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5x - 1$, $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (3x-1)\sqrt{x}$, $\mathscr{D} =]0\,;\,+\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$, $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

d). $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$, $\mathscr{D} = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+5}$, $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

IV

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

On note f' la fonction dérivée de f, f'' la dérivée de f' $\left(f'' = \left(f'\right)'\right)$, $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer alors l'expression de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.
3. La démontrer.

V

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

1. Dériver les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$.
2. Conjecturer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. À partir de cette conjecture, montrer que
   $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.