Exercices de bac sur la fonction ln

I Amérique du Nord mai 2018

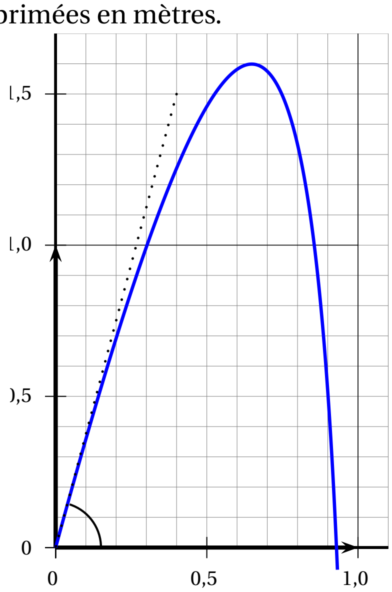
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   - Montrer que , pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1[$:
   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$
   - En déduire que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0 ; 1[$.
   - Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

II Amérique du Nord mai 2012

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

   Montrer que la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1 ; +\infty[$.

   (c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   (d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln(k)}{k}$.

   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

III Antilles-Guyane septembre 2012

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \mathrm{e}$ alors $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
   (b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) Déterminer sa limite ℓ.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X / ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3
n	3	4	5
u_n	2,718 372 634 6	2,718 281 830 0	12,718 281 828 5

ANNEXE