

# Rappels sur les suites :

## Table des matières

<b>I Généralités</b>	<b>1</b>
I.1 Façons de définir une suite :	1
I.2 Sens de variation :	2
I.3 Représentation graphique	4
I.4 Suites arithmétiques :	5
I.5 Suites géométriques :	7
<b>II Limites des suites :</b>	<b>8</b>
II.1 Limite infinie :	8
II.2 Cas des suites croissantes non majorées	9
II.3 Limite finie	9
II.4 Unicité de la limite	10
II.5 Théorème des gendarmes (admis)	11
II.6 Opérations et limites	11
II.7 Limites et puissances	12
<b>III Théorème de convergence :</b>	<b>13</b>

## I Généralités



### Définition

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels.

Si  $u$  est le nom de la suite, l'image de  $n$  par  $u$  se note  $u(n)$  (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle  $u_n$  (notation indicielle).

L'ensemble des termes de la suite se note alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### I.1 Façons de définir une suite :

Il existe essentiellement deux façons :

#### a) Suites définies par la donnée explicite de leurs termes :

**Exemple :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n + 1$ . On peut calculer chaque terme de manière explicite séparément les uns des autres.

De même, soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $v_n = f(n)$  où  $f(x) = x^2 + 5$ . On peut calculer chaque terme indépendamment les uns des autres.

b) **Suites définies par récurrence :**

La suite est définie par la donnée d'un ou de plusieurs premiers termes et par une relation entre un terme et un ou plusieurs termes précédents.

**Exemples :**

- Soit la suite  $(w_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} w_0 = 3 \\ w_{n+1} = 4w_n + 5 \end{cases}$$

On a :  $w_1 = 17, w_2 = 73 \dots$

- **Suite de Fibonacci :**

Soit la suite  $(F_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On a :  $F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8 \dots$

Pour calculer chaque terme, il faut avoir calculé les termes précédents.

Pour ceux qui souhaitent en savoir davantage sur la suite de Fibonacci, cliquer [ici](#)

**Remarque :** lorsqu'une suite est définie par récurrence, on essaye de se ramener à une formule explicite des termes, mais ce n'est pas toujours possible.

## I.2 Sens de variation :



### Définition

Une suite  $(u_n)$  est croissante si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ .

Une suite  $(u_n)$  est décroissante si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ .

Une suite  $(u_n)$  est constante si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $u_n = u_{n+1}$ .

### Techniques d'étude :

1. **Technique fonctionnelle :** elle s'applique lorsque la suite est fonctionnelle, c'est-à-dire lorsque l'on a  $u_n = f(n)$ . On peut étudier alors les variations de la fonction  $f$ . Si  $f$  est croissante (décroissante), alors la suite est croissante (décroissante)

**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^2 - 6n + 1$  est croissante pour  $n \geq 3$ .

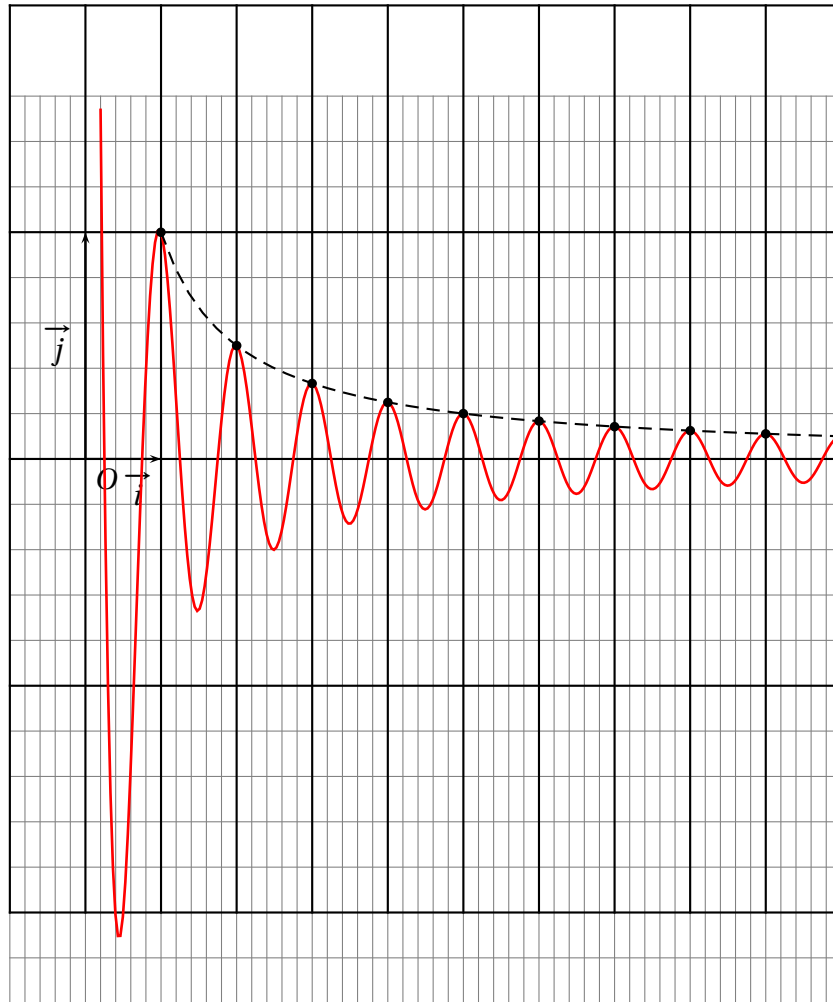
En effet, la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 6x + 1$  a pour dérivée :  $f' : x \mapsto 2x - 6 = 2(x - 3)$  et  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ , donc  $f$  est croissante sur  $[3 ; +\infty[$ .



### Attention

La réciproque est fautive :

**Exemple :** La fonction  $g(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$  n'est pas monotone, mais la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = g(n) = n$  est décroissante.



## 2. Techniques algébriques :

(a) On étudie le **signe** de la différence  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple** : soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = u_n + n^2$ .

Pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$  donc  $(u_n)$  est croissante.



### Théorème

(b)

On suppose que, pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ ,

Si, pour tout  $n$ , le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est supérieur à 1, la suite est croissante;

s'il est compris entre 0 et 1, celle-ci est décroissante.

**Démonstration** :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$  qui est du signe de  $u_{n+1} - u_n$  puisque le dénominateur  $u_n$  est positif pour tout  $n$ .

**Exemple :** soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ .

Que peut-on dire de cette suite?

**Réponse :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

### I.3 Représentation graphique

**Exemple :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 4} \end{cases}$

On a  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = 2\sqrt{x+4}$ .

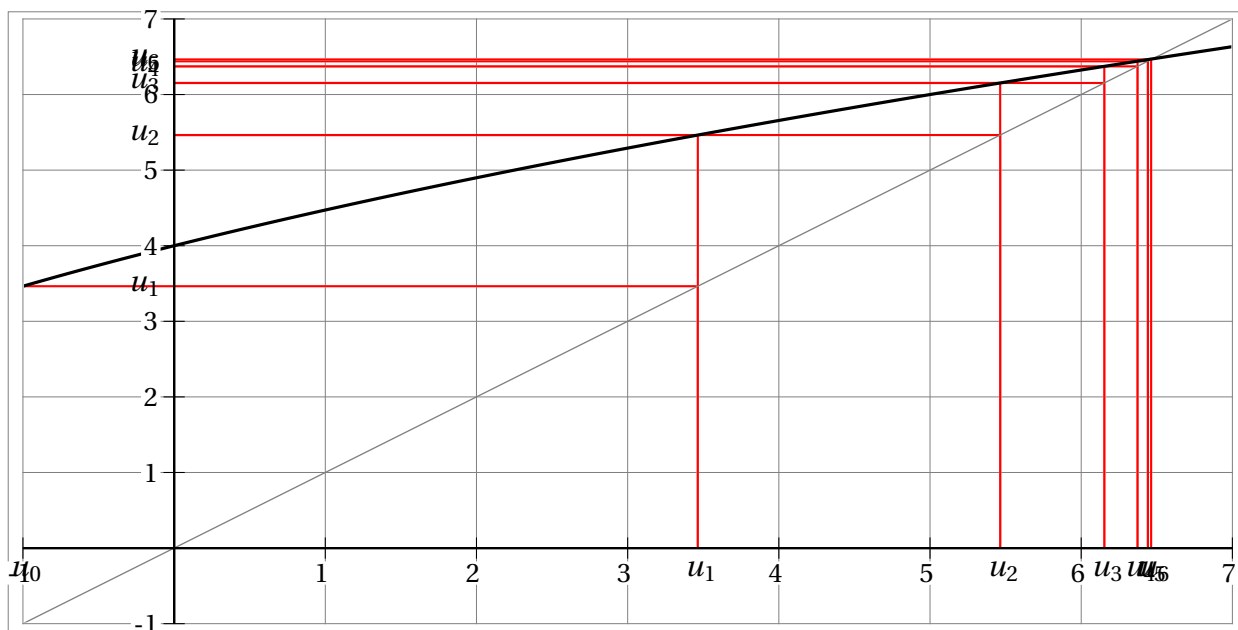
On représente la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite d'équation  $y = x$  (première bissectrice).

Sur l'axe des abscisses, on place  $u_0 = -1$ .

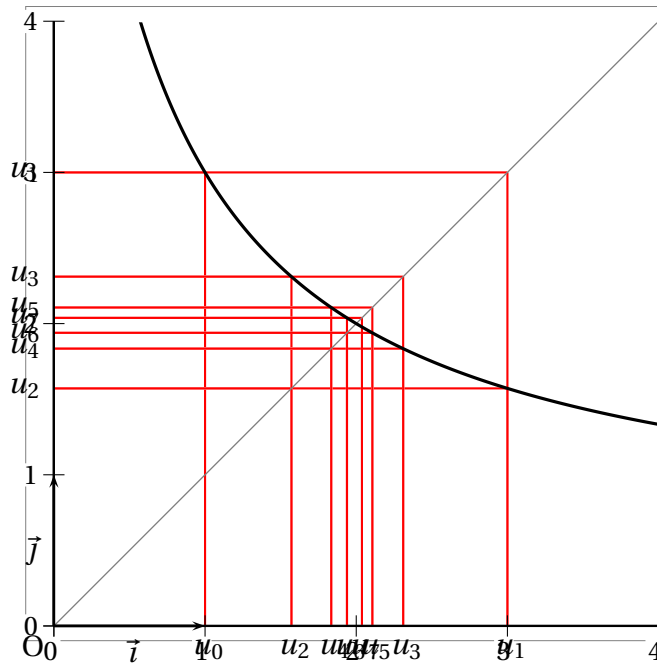
$u_1 = f(u_0)$ ; à partir de  $u_0$ , on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses jusqu'à la courbe  $\mathcal{C}_f$ . L'ordonnée du point d'intersection est  $u_1$ .

On trace alors la droite parallèle à l'axe des abscisses à partir du point d'intersection précédent jusqu'à la bissectrice; ce point a pour coordonnées  $(u_1; u_1)$ ; on place alors sur l'axe des abscisses le nombre  $u_1$ .

On recommence à partir de  $u_1 \dots$



Autre exemple : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$$



**Remarque :**

Il existe deux types de suites très simples et très courantes en mathématiques qui méritent donc d'être étudiés en détail; ce sont les suites **arithmétiques** et les suites **géométriques**.

**I.4 Suites arithmétiques :**



**Définition**

Une suite  $(u_n)$  est arithmétique s'il existe un nombre  $r$ , appelé raison de la suite, tel que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .  
On a alors :  $u_{n+1} - u_n = r$  (la différence de deux termes consécutifs est constante)



**Propriété**

**Terme général** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 + nr$   
ou plus généralement :  $u_n = u_p + (n - p)r$  ( $n \geq p$ ).  
La suite est complètement déterminée si l'on connaît un terme et la raison.

**Démonstration** : Pour  $u_n = u_0 + nr$ , la démonstration se fait par récurrence. (l laissée au lecteur)

On a : 
$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_p = u_0 + pr \end{cases}$$
 ; par soustraction, on trouve  $u_n - u_p = nr - pr = (n - p)r$  d'où  $u_n = u_p + (n - p)r$ .



## Théorème

Les suites arithmétiques sont les suites dont le terme général est de la forme :  $u_n = an + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

### Démonstration :

- Si  $(u_n)$  est arithmétique,  $u_n = u_0 + nr = an + b$  avec  $a = r$  et  $b = u_0$ .
- **Réciproque :** soit  $(u_n)$  avec  $u_n = an + b$ ; on a :  $u_{n+1} - u_n = a$  donc  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r = a$

### Somme de termes consécutifs :



## Propriété

Soit  $\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Alors :  $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Démonstration :

On écrit  $\sigma_n$  à l'endroit et à l'envers et on ajoute terme à terme :

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$\sigma_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

Par somme :  $2\sigma_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$  (car il y a  $n$  termes égaux à  $n+1$ ).

Par conséquent :  $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$



## Propriété

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique.  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$ .

- **Première formule :**  $S_n = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}$

- **Deuxième formule :**  $S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$ .

### Démonstration :

- Première formule :

$$S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr) = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + 3 + \dots + n) = (n+1)u_0 + r\sigma_n$$

$$= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r.$$

- Deuxième formule : écrivons  $S_n$  de deux façons différentes, une fois à l'endroit, une fois à l'envers :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0.$$

En ajoutant terme à terme :

$$2S_n + (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_p + u_{n-p}) + \dots + (u_n + u_0).$$

$$\text{Or, pour tout } p : u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_n - pr) = u_0 + u_n.$$

On en déduit :  $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$  (car il y a  $(n+1)$  termes) donc  $S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

**Exemple :** calculer  $S = 100 + 102 + \dots + 154$ .

Ce sont les termes d'une suite arithmétique de raison  $r = 2$ . Il y a 28 termes ( $154 = 100 + 27 \times 2$ ).

$$\text{Donc : } S = \frac{28(100 + 154)}{2} = 3556$$

**Variations :**



### **Théorème**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .  
 $(u_n)$  est croissante si, et seulement si,  $r$  est positif.  
 $(u_n)$  est décroissante si, et seulement si,  $r$  est négatif.  
 $(u_n)$  est constante si, et seulement si,  $r = 0$ .

**Démonstration :**  $u_{n+1} - u_n = r$  d'où le résultat.

## **I.5 Suites géométriques :**



### **Définition**

Une suite  $(u_n)$  est géométrique si et seulement s'il existe un nombre réel  $q$  appelé raison de la suite, tel que, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = qu_n$ .



### **Théorème**

Alors, pour tout  $n$  :  $u_n = qu_{n-1}$  ou plus généralement :  $u_n = u_p q^{n-p}$  pour  $p \leq n$ .  
Une suite géométrique est entièrement déterminée par un terme et sa raison.

La démonstration se fait par récurrence.



### **Théorème**

Les suites géométriques sont les suites dont le terme général est de la forme  $u_n = aq^n$ ,  $a$  et  $q$  étant des constantes.

**Démonstration :**

- Si  $(u_n)$  est géométrique,  $u_n = u_0 q^n = aq^n$  avec  $a = u_0$ .
- **Réciproque :** Si  $u_n = aq^n$ ,  $u_{n+1} = aq^{n+1}$  donc  $u_{n+1} = au_n$  :  $(u_n)$  est bien géométrique, de raison  $a$ .

## Somme de termes consécutifs :



### Propriété

Soit  $q$  un nombre. Posons  $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=1}^n q^i$ .

• Si  $q = 1$ ,  $\sigma_n = (n + 1)$ .

• si  $q \neq 1$ , on a :  $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

### Démonstration :

• Si  $q = 1$ , c'est évident ;  $S_n + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$ .

• Si  $q \neq 1$ , on calcule  $S_n$  et  $qS_n$  et on soustrait :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n.$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}.$$

Alors :  $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$  (il ne reste que le premier terme de la première ligne et le dernier de la deuxième ligne).

D'où :  $S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$  et :  $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$



### Théorème

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  ( $q \neq 1$ ).

• Soit  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

• Si  $S = x + \dots + y$  est la somme de  $p$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q$  ( $q \neq 1$ ), alors :

$$S = x \left( \frac{1 - q^p}{1 - q} \right)$$

## II Limites des suites :

### II.1 Limite infinie :



### Définition :

• Dire qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$  signifie que tout intervalle  $]A; +\infty[$  avec  $A$  réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

• Dire qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$  signifie que tout intervalle  $] -\infty; A[$  avec  $A$  réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

### Exemples :

- Soit  $(u_n)$  définie par :  $u_n = n^2$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Démonstration :** soit  $A > 0$ . Prenons  $p = E(\sqrt{A}) + 1$ . Alors  $p^2 > A$ . Pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n = n^2 > p^2 > A$  donc  $u_n \in [A; +\infty[$ .

D'après la définition,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- $u_n = -n^3$  : de même,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

## II.2 Cas des suites croissantes non majorées



### Définition

- Dire qu'une suite  $u$  est majorée signifie qu'il existe un réel  $M$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq M$ .
- Dire qu'une suite  $u$  est minorée signifie qu'il existe un réel  $m$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq m$ .

**Exemple :**  $u$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ .  $u$  est minorée et majorée.



### Propriété :

- (a) Si  $u$  est une suite croissante non majorée, alors  $u$  tend vers  $+\infty$ .
- (b) Si  $u$  est une suite décroissante non minorée, alors  $u$  tend vers  $-\infty$ .

### Démonstration de (a) :

Soit  $A$  un réel quelconque. Comme  $u$  n'est pas majorée, il existe un entier  $p$  tel que, pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n > A$ . La suite  $u$  est croissante, donc, pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n \geq u_p$ .

Alors, pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n \in ]A; +\infty[$ .

Ainsi, la suite tend vers  $+\infty$ .

Même démonstration pour (b)

## II.3 Limite finie



### Définition

$\ell$  désigne un réel quelconque. Dire qu'une suite  $u$  a pour limite  $\ell$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est convergente vers  $\ell$ .

**Notation et exemples :** On écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Exemple :**  $u_n = \frac{1}{n}$ .

**Remarque :** une suite qui n'est pas convergente est divergente.



### Définition

Une suite divergente est une suite non convergente.  
Elle a une limite infinie **ou** n'a pas de limite.

**Exemple 1 :**  $u$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

- Démontrer que la suite  $u$  est croissante.
- Démontrer que pour  $m \geq 1$ ,  $u_{2m} - u_m \geq \frac{1}{2}$  [1]
- Écrire l'inégalité [1] successivement pour  $m = 1, m = 2, m = 4, m = 8, \dots, m = 2^{n-1}$  puis additionner membre à membre ces inégalités.  
En déduire que  $u_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . En déduire que la suite  $u$  n'est pas majorée et déterminer la limite de la suite  $u$ .

### Exemple 2 :

Que peut-on dire de la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = (-1)^n$  ?

**Exercice :** Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Solution :

Soit  $(u_n)$  une suite qui converge vers un réel  $\ell$ .

Considérons par exemple l'intervalle  $]\ell - 1 ; \ell + 1[$ .

D'après la définition de la convergence, il existe un réel  $A$  tel que, pour tout  $n > A$ ,  $u_n \in ]\ell - 1 ; \ell + 1[$ .

Les termes  $u_0, u_1, \dots, u_A$  sont en nombre fini, donc bornés, par le plus petit et le plus grand d'entre eux.

Les termes  $u_n$ , pour  $n > A$  sont bornés par  $\ell - 1$  et  $\ell + 1$ .

On en déduit que la suite est bornée.

## II.4 Unicité de la limite



### Théorème

Soit  $(u_n)$  une suite convergente. Elle admet donc une limite  $\ell$ .  
Cette limite est **unique**.

Démonstration :

Effectuons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que la suite admette deux limites,  $\ell$  et  $\ell'$ , avec  $\ell < \ell'$ .

Posons  $h = \frac{\ell' - \ell}{3}$ .

Puisque la suite converge vers  $\ell$ , il existe un entier  $A$ , tel que, pour tout  $n > A$ ,  $u_n \in ]\ell - h ; \ell + h[$ . La suite converge vers  $\ell'$ , donc il existe un entier  $B$ , tel que, pour tout  $n > B$ ,  $u_n \in ]\ell' - h ; \ell' + h[$ .

Soit  $C$  le maximum de  $A$  et de  $B$  :  $C = \text{Max}(A ; B)$ .

Pour  $n > C$ ,  $u_n \in ]\ell - h ; \ell + h[ \cap ]\ell' - h ; \ell' + h[$ ; or, ces deux intervalles sont disjoints.

En effet :  $\ell' - h - (\ell + h) = \ell' - \ell - 2h = \ell' - \ell - 2 \frac{\ell' - \ell}{3} = \frac{3(\ell' - \ell) - 2(\ell' - \ell)}{3} = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$ .  
 C'est impossible, donc l'hypothèse de départ est fautive.

## II.5 Théorème des gendarmes (admis)



### Théorème des gendarmes

- Premier cas :** Soit  $(u_n)$  une suite qui tend vers  $+\infty$ . Soit une autre suite  $(v_n)$ . S'il existe un entier  $p$  tel que, pour tout  $n \geq p$ ,  $v_n \geq u_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .  
 On a une propriété analogue si la limite est  $-\infty$ .
- Deuxième cas :** Soient trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .  
 Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  et s'il existe un entier  $p$  tel que, pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

### Démonstration (hors-programme) :

- Premier cas :**

Soit  $A > 0$  un nombre quelconque.

$(u_n)$  tend vers  $+\infty$ , donc il existe un entier  $q$  tel que, pour tout  $n \geq q$ ,  $u_n > A$ .

Pour tout  $n \geq p$ ,  $v_n \geq u_n$ .

Soit  $r = \text{Max}(p ; q)$ . ( $r$  est le plus grand des deux entiers  $p$  et  $q$ ).

Pour tout  $n \geq r$ ,  $A < u_n \leq v_n$  donc  $v_n > A$ .

La suite  $(v_n)$  tend donc vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- Deuxième cas :**

Soit  $I = ]\ell - \alpha ; \ell + \alpha[$  un intervalle quelconque centré sur  $\ell$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  donc il existe un entier  $q$  tel que, pour tout  $n \geq q$ ,  $u_n \in ]\ell - \alpha ; \ell + \alpha[$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$  donc il existe un entier  $r$  tel que, pour tout  $n \geq r$ ,  $w_n \in ]\ell - \alpha ; \ell + \alpha[$ .

On sait que, pour tout entier  $n \geq p$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Soit  $s = \text{Max}(p ; q ; r)$ .

Pour tout entier  $n \geq s$ ,  $\ell - \alpha \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \alpha$ , donc  $v_n \in ]\ell - \alpha ; \ell + \alpha[$ .

On en déduit que la suite  $(v_n)$  a aussi pour limite  $\ell$ .

## II.6 Opérations et limites

### Addition ou soustraction

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels. Alors :

Si $(u_n)$ a pour limite	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $(v_n)$ a pour limite	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>Forme indéterminée</b>

## Produit

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels. Alors :

Si $(u_n)$ a pour limite	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $(v_n)$ a pour limite	$\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>Forme indéterminée</b>

## Quotient

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels. Alors :

Si $(u_n)$ a pour limite	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $(v_n)$ a pour limite	$\ell \neq 0'$	$\pm\infty$	0	$\ell'$	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	<b>Forme indéterminée</b>	<b>Forme indéterminée</b>

**Remarque :** Les formes indéterminées sont : «  $\infty - \infty$ ;  $0 \times \infty$ ;  $\frac{0}{0}$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

## II.7 Limites et puissances



### Propriété

- Soit  $q > 1$ ; alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q; n = +\infty$
- Soit  $q \in ]-1; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q; n = 0$

### Démonstration :

- Soit  $a > 0$  un réel. Démontrons par récurrence que, pour tout  $n$ ,  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

a) Pour  $n = 0$  :  $(1+a)^0 = 1$  et  $1+na = 1+0a = 1$  donc c'est vrai au rang  $n=0$

b) On suppose que c'est vrai pour un rang  $n$  quelconque, donc  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

Alors :  $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$  car  $na^2 > 0$ .

La propriété est vraie au rang  $n + 1$ , donc héréditaire.

Elle est donc vraie pour tout  $n$ .

- Soit  $q > 1$ . Il existe  $a$  tel que  $q = 1 + a$ .  
Alors  $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si  $q = 0$ , c'est évident
- Si  $0 < q < 1$ , on pose  $Q = \frac{1}{q} > 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Q}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Q^n}\right) = 0$  d'après ce qui précède.
- Si  $-1 < q < 0$ ,  $q = -Q$  avec  $0 < Q < 1$  et on applique ce qui précède.

### III Théorème de convergence :



#### Théorème admis

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

**Exemple :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_n = 2, \underbrace{4848 \cdots 48}_{n \text{ groupes } 48}$  pour  $n \geq 1$ .

Il est clair que cette suite est croissante, majorée par 3 (ou 2,5), donc elle est convergente vers une limite réelle  $\ell$ , avec  $\ell = 2,4848484848484848 \cdots$ .

Essayons de trouver une **expression rationnelle** de  $\ell$ .

$$\text{On a : } u_n = 2 + \frac{48}{100} + \frac{48}{1000} + \cdots + \frac{48}{10^{2n}} = 2 + 48 \times \left( \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} \right)$$

$$= 2 + 48 \times \left[ \left( \frac{1}{10^2} \right) + \left( \frac{1}{10^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{10^2} \right)^3 + \cdots + \left( \frac{1}{10^2} \right)^n \right].$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\text{On en déduit : } u_n = 2 + 48 \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{\frac{99}{100}} = 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{99} \left( 1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n \right).$$

$$\text{Comme } -1 < \frac{1}{10^2} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{10^2} \right)^n = 0.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 2 + 48 \times \frac{1}{99} = \frac{2 \times 99 + 48}{99} = \boxed{\frac{246}{99}}.$$