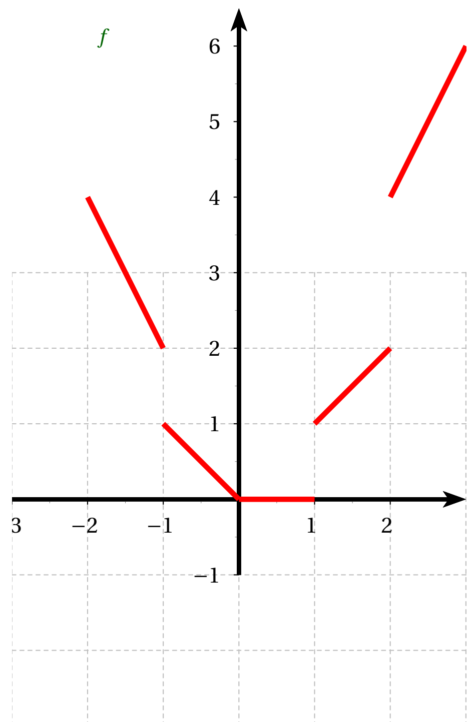
TS : TD sur la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires

I

On note E la fonction partie entière.
La fonction $g : x \mapsto xE(x)$ est-elle continue en 0 ?
$E(x) = -1$ sur $[-1\,;\,0[$ et 0 sur $[0\,;\,1[$ donc $f(x) = -x$sur $[-1\,;\,0[$ et 0 sur $[0\,;\,1[$.
$f(0) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) = 0 = f(0)$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (0) = 0 = f(0)$
- On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0

Courbe (non demandée) :



II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x + 5.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$.

- f est continue comme fonction polynôme (ou somme de fonctions continues)
- $f(-2) = 5 < 8$
- $f(3) = 20 > 8$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -x^3 - 2x + 5.$$

1. $f'(x) = -3x^2 - 2 < 0$ car $-3x^2 \leqslant 0$ donc $-3x^2 - 2 \leqslant -2 < 0$.
   On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}\right)$.
   $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(-1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) = -1.$
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   Tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

   - f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
   Comme f est décroissante, cette solution est unique : on la note α.

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1{,}33$
4. Signe de $f(x)$:

x	$-\infty$ $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$ $\;0\;$ $-$

IV

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ [1].

Partie A : recherche du nombre de solutions

1. Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.
   $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1.$
   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1)$.
   $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$.
   $f'(x)$ est un trinôme du second degré; $f'(x) > 0$ pour x à l'extérieur de l'intervalle formé par le racines et négatif entre les racines (car le coefficient de x^2 est positif).
   Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. • Sur $]-\infty\,;\,-1$, f est continue, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 3 > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solutions dans cet intervalle (unique car la fonction est monotone).
   • De même, l'équation aune solution unique dans l'intervalle [-1 ; 1]
   • De même, l'équation aune solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$

Partie B : recherche des solutions exactes

On cherche les solutions de l'équation [1] sous la forme $x = 2\cos\theta$, avec θ réel.
Rappel : pour tout angle θ :

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

1. $cos(3\theta) = \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) = \left(2\cos^2\theta - 1\right)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$
   $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.
   On en déduit que $\cos(3\theta) + 3\cos\theta = 4\cos^3\theta$
2. On pose $x = 2\cos\theta$.
   x est solution. de m'équation [1] si, et seulement si $x^3 - 3x + 1 = 0$.
   $x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos\theta)^3 - 3\times 2\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$
   $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\cos(3\theta) = -\dfrac{1}{2}}$
3. Soit [2] l'équation $\cos(3\theta) = -\dfrac{1}{2}$.
   [2] s'écrit $\cos(3\theta) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.
   On sait que $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $a = -b + 2k'\pi\ ,k' \in \mathbb{Z}$.
   On en déduit $3\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ donc $\theta = \dfrac{2\pi}{9} + 2k\dfrac{\pi}{3}$ ou $3\theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 2'\pi$ donc $\theta = -\dfrac{2\pi}{9} + 2k'\dfrac{\pi}{3}$.
4. Comme la fonction cos est paire, le solutions de l'équation [1]sont :
   $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)$, $2\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)$ et $2\cos\left(\dfrac{14\pi}{9}\right)$.