TS : exercices de type bac sur les nombres complexes

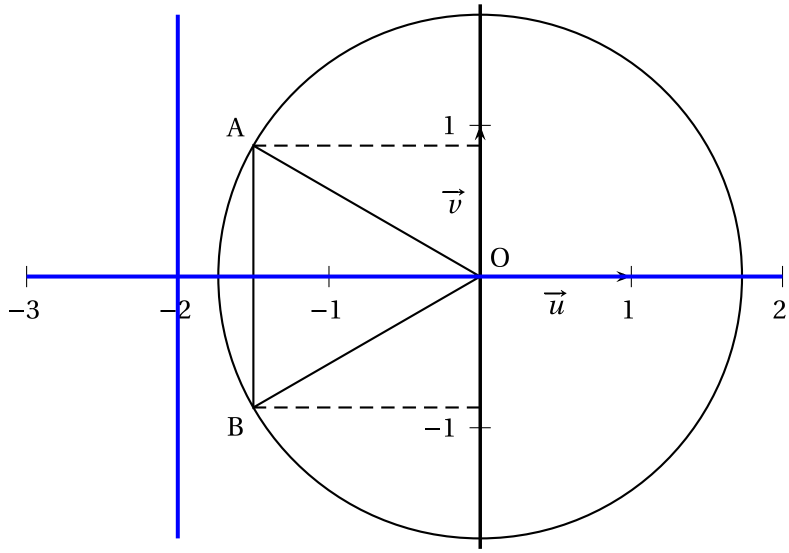
I

À tout nombre complexe z différent de -2i, on associe le nombre complexe $Z=\dfrac{z-2+\text{i}}{z+2\text{i}}$.
On pose $z=x+\text{i}y$, x et y réels.

1. On trouve : $\text{Re}(Z)=\dfrac{(x^2-2x+y^2+3y+2)}{(x^2+\left(y+2\right)^2}$ et $\text{Im}(Z)=\dfrac{(-x+2y+4)}{(x^2+y^2+4y+4)}$.
2. En déduire
   — $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x+2y+4=0$ qui est une équation de droite. $\mathscr{E}$ est donc la droite d'équation $-x+2y+4=0$
   — $Z\in\text{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+3y+2=0\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+2=0\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.
   $\mathscr{F}$ est le cercle de centre $\Omega\left(1\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

II Polynésie juin 2015

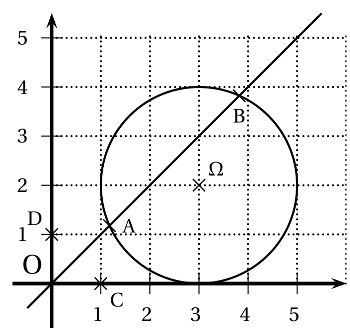
1. $M(z)$ est invariant si $M'=M \iff z'=z \iff z^2+4z+3=z \iff z^2+3z+3=0$.
   $\Delta=3^2-4\times3=9-12=-3=\left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.
   Cette équation a deux solutions :
   $z_1=\dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{2}$.
   On a $|z_1|^2=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Rightarrow |z_1|=\sqrt{3}$.
   Le même calcul donne $|z_2|=\sqrt{3}$.
   On a donc $z_1=\dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.
   On trouve de la même façon que $z_2=\sqrt{3}\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.
2. On a $z_A=z_2$, donc $|z_A|=\text{OA}=|z_2|=\sqrt{3}$.
   De même $z_B=z_1$, donc $|z_B|=\text{OB}=|z_1|=\sqrt{3}$.
   Enfin $\text{AB}=|z_B-z_A|=\left|\dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2}-\left(\dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|\text{i}\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$.
   On a donc $\text{OA}=\text{OB}=\text{AB}=\sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.
3. Soit $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ son point associé.
   M' est sur l'axe des réels si $y'=0$.
   Or on sait que l'affixe du point M est :
   $z^2+4z+3=(x+\text{i}y)^2+4(x+\text{i}y)+3=x^2-y^2+2\text{i}xy+4x+4\text{i}y+3=x^2-y^2+3+\text{i}(2xy+4y)$.
   On a donc $y'=0 \iff 2xy+4y=0 \iff 2y(x+2)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0\\ x+2 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0\\ x & = & -2\end{array}\right.$
   Conclusion : l'ensemble $\mathscr{E}$ est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x=-2$ (droites en bleu).
4.



III Centres étrangers juin 2015

1. Affirmation 1 :

Notons C et D les points d'affixes respectives 1 et i.
Alors :$|z-1|=|z-\text{i}| \iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D|$
$\iff MC = MD$.
L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1| = |z-\text{i}|$ est donc la médiatrice de [CD], c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.
Notons Ω le point de coordonnées $(3~;~2)$ qui a donc pour fixe $3+2\text{i}$.
$|z-3-2\text{i}| \leqslant 2.\ \iff |z_M - z_\Omega| \leqslant 2 \iff M\Omega \leqslant 2$. S est donc bien le segment [AB]



L'ensemble S est le segment [AB]. **VRAI**

2. Affirmation 2 : Soit $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

$|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Alors $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

On en déduit que $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{1515} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} = 2^{1515}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{505\pi}{2}}$.

Or $\dfrac{505\pi}{2} = \dfrac{4 \times 126 + 1}{2}\pi = 126 \times 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $a^{1515} = 2^{1515}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(126\times 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{1515}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2^{1515}\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. **FAUX**

3. Affirmation 3 : $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 2t \\ y & = & -3+4t \\ z & = & 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. est la représentation paramétrique d'une droite.

Pour $t = 1$, on obtient les coordonnées de E et pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient les coordonnées de F.

E et F appartiennent à cette droite, donc cette droite est bien la droite (EF). **VRAI**

4. Affirmation 4 : On a E(2 ; 1 ; −3), F(1 ; −1 ; 2) et G(−1 ; 3 ; 1).

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ ont pour coordonnées :

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Alors : $\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\overrightarrow{\mathrm{EG}} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 2 = 3 - 4 + 20 = 19$.

$\mathrm{EF} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$; $\mathrm{EG} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

On a alors :

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \mathrm{EF} \times \mathrm{EG} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{FEG}}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{\mathrm{FEG}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{EF}}.\overrightarrow{\mathrm{EG}}}{\mathrm{EF} \times \mathrm{EG}} = \dfrac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} = \dfrac{19}{\sqrt{870}}$.

À la calculatrice, on trouve $\widehat{\mathrm{FEG}} \approx 49,89\ ^{\circ} \approx 50\ ^{\circ}$. **VRAI**