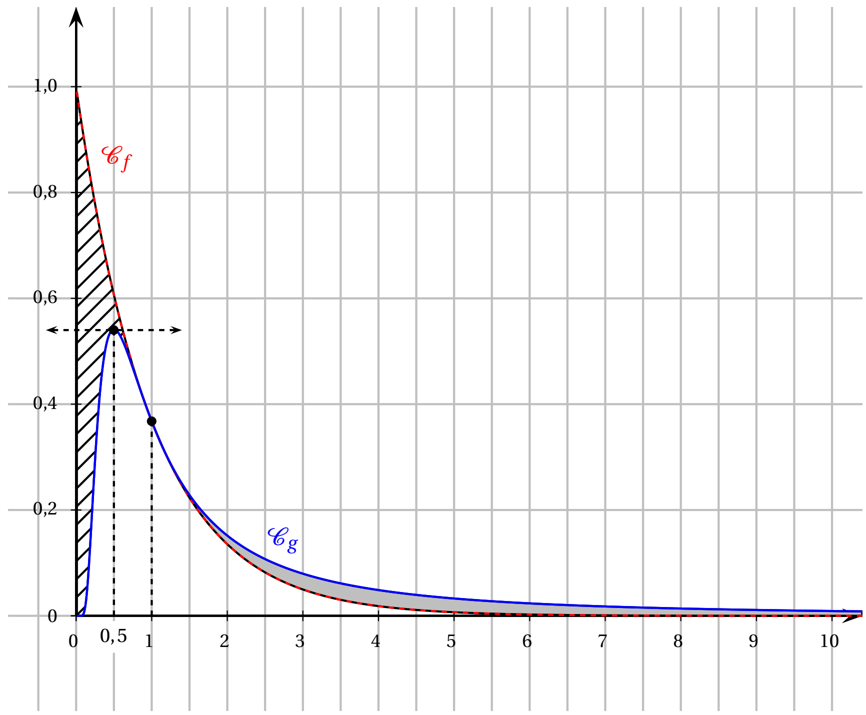
# Correction de la feuille d'exercices du bac - intégration

## I Nouvelle Calédonie novembre 2018

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

On admet que $f$ et $g$ sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$. On note $f'$ et $g'$ leurs fonctions dérivées respectives. Les représentations graphiques de $f$ et $g$ dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous :




### Partie A – Conjectures graphiques

1. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $f(x)=g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $\boxed{x=1}$.
2. D'après le graphique, on peut dire qu'une solution de l'équation $g'(x)=0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $\boxed{x=0,5}$.

### Partie B – Étude de la fonction $g$

1. On cherche la limite de $g(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0\\[2ex] \displaystyle\lim_{X\to0}\mathrm{e}^X=1\end{array}\right\}\text{ donc }\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=1\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$$

On peut donc dire que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$.

2. On admet que la fonction $g$ est strictement positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\ln\big(g(x)\big)$.

(a) Pour tout nombre réel $x$ strictement positif,

$$h(x)=\ln\big(g(x)\big)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=-\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{x}=-2\ln x-\frac{1}{x}=\boxed{\frac{-1-2x\ln x}{x}}.$$

(b) On calcule la limite de $h(x)$ quand $x$ tend vers 0.
On sait que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$. On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-1-2x\ln x\right)=-1\text{ et donc que }\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-1-2x\ln x}{x}=-\infty\text{, c'est-à-dire }\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}h(x)=-\infty}.$$

(c) Pour tout $x>0$, $h(x)=\ln\big(g(x)\big)$ donc $g(x)=\mathrm{e}^{h(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^{h(x)}=0 \text{ ce qui veut dire que } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=0}.$$

3. Pour tout $x>0$, la dérivée de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

   Pour tout $x>0$, la dérivée de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x\mapsto -\dfrac{-2}{x^3}$.

   Pour tout $x>0$, la dérivée de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

   Donc pour tout $x>0$, $g'(x)=\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}\times\left(\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}}$.

4. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^4>0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1-2x$ :

   - la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;\,0,5]$ ;
   - la fonction $g$ est strictement décroissante sur $[0,5\,;\,+\infty[$.

## Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. Soit A le point de coordonnées $\left(1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$.
   $f(x_{\mathrm{A}})=f(1)=\mathrm{e}^{-1}=y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   $g(x_{\mathrm{A}})=g(1)=\dfrac{1}{1^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1}}=\mathrm{e}^{-1}=y_{\mathrm{A}}$ donc le point A appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
   Donc le point A est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
2. Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.
   La fonction $f$ définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ a pour primitive la fonction $x\mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.
   La fonction $g$ est définie par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ de la forme $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ d'après ce qui a été vu précédemment; elle a donc pour primitive la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ c'est-à-dire $x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
   La fonction $(f-g)$ a donc pour primitive la fonction $x\mapsto -\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
   On en déduit que
   $$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]_a^b=-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}-\left(-\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}\right)=\boxed{\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}}.$$
3. D'après la question précédente,
   $$\int_a^1 \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{-1}{1}}\boxed{=\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}-2\mathrm{e}^{-1}}.$$
   $\lim\limits_{a\to0}\mathrm{e}^{-a}=\mathrm{e}^0=1$
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{a\to0\\a>0}} -\dfrac{1}{a}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{\substack{a\to0\\a>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}=0$$
   On peut donc déduire que $\lim\limits_{\substack{a\to0\\a>0}}\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}=1$ et donc que $\boxed{\lim\limits_{a\to0}\int_a^1\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-1}}$.
4. On admet que $\lim\limits_{a\to0}\int_a^1\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
   Sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ donc
   $\lim\limits_{a\to0}\int_a^1\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
   C'est l'aire de la région hachurée sur le graphique.
   Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ donc
   $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$, et les droites $x=1$ et $x=b$

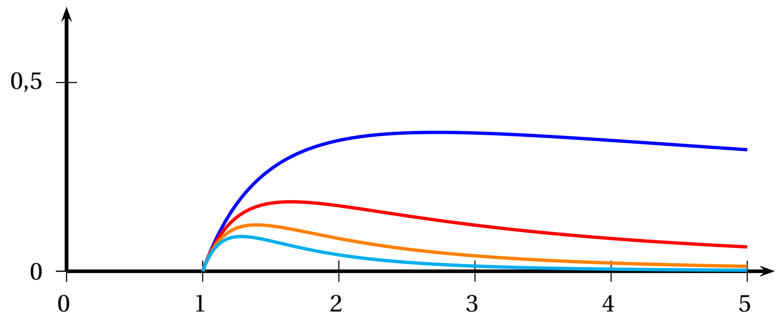
quand $b$ tend vers $+\infty$.
C'est l'aire de la région grisée sur le graphique.
On peut donc dire que ces deux aires sont égales.

## II Liban mai 2018

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions $f_n$ définies sur l'intervalle $[1\,;5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}.$$

. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n$ appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.




1. $f_n = \dfrac{u}{v_n}$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v_n(x) = x^n \end{cases}$.

   $f' = \left(\dfrac{u}{v_n}\right)' = \dfrac{u' v_n - u v_n'}{v_n^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v_n'(x) = n x^{n-1} \end{cases}$.

   Alors : $f_n'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x^n - n x^{n_1} \ln x}{x^{2n}} = \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}} = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \boxed{\dfrac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction $f_n$ admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;5]$.
   On note $A_n$ le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
   L'abscisse $x_n$ de $A_n$ est la valeur pour laquelle $f_n'(x)$ s'annule, donc
   $1 - n\ln x_n = 0 \iff x_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \in [1\ ;\ 5]$.

   L'ordonnée de $A_n$ est alors $y_n = f_n(x_n) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln(x_n)$.

   Les points $A_n$ appartiennent donc à la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln x$.

3. (a) $\forall x \in [1\ ;\ 5]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln(5)$ car la fonction ln est croissante ; en divisant par $x^n$ positif, on trouve

   $$\boxed{0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.}$$

   (b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^5 = \frac{1}{n-1}\left[-\frac{1}{5^{n-1}} - (-1)\right) = \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$.

   (c) L'aire cherchée est $\mathscr{A}_n = \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

   On sait que $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln 5}{x^n}$ donc par conservation de l'ordre,

   $\displaystyle\int_1^5 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n} = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

   $5 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$.

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$.

   Par produit : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = 0}$.

# III Métropole, juin 2017

## Partie A

On considère la fonction $h$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Pour tout $x$, $h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$ ; d'après les croissances comparées,

   $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=+\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)=0}$.

2. $h$ est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.

   $h=u\mathrm{e}^w$ avec $\begin{cases}u(x)=x\\ w(x)-x\end{cases}$.

   $h'=\left(u\mathrm{e}^w\right)'=u'\mathrm{e}^w+u\left(\mathrm{e}^w\right)'=u'\mathrm{e}^w+u\times w'\mathrm{e}^w$ avec $\begin{cases}u'(x)=\\ w'(x)=-1\end{cases}$.

   On en déduit : $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}+x\times(-1)\mathrm{e}^{-x}$ donc, après factorisation par $\mathrm{e}^{-x}$ : $\boxed{h'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

   Pour tout $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x}>0$ ; $h'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$ et
   $h'(x)>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$.

   $h(0)=0$ et $h(1)=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   **Tableau de variation :**

   | $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $h'(x)$ | | $\nearrow$ | $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\approx 0,37$ | $\searrow$ | $0$ |

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction $h$.

   (a) Pour tout $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x}-h'(x)=\mathrm{e}^{-x}-(1-x)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}=h(x)$ donc

   $$\boxed{h(x)=\mathrm{e}^{-x}-h'(x)}$$

   (b) Soit la fonction $v: x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ ; $v(x)=-(-1)\mathrm{e}^{-x}=-w'(x)\mathrm{e}^{w(w)}$ (avec les notations précédentes) donc une primitive de $v$ est

   $$\boxed{V: x\longmapsto -\mathrm{e}^{w(x)}=-\mathrm{e}^{-x}}$$

   (c) Soit $H$ une primitive de $h$.
   $h(x)=\mathrm{e}^{-x}-h'(x)$ donc $H(x)=-\mathrm{e}^{-x}-h(x)$ d'où $\boxed{H(x)=-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}}$.

## Partie B

On définit les fonctions $f$ et $g$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

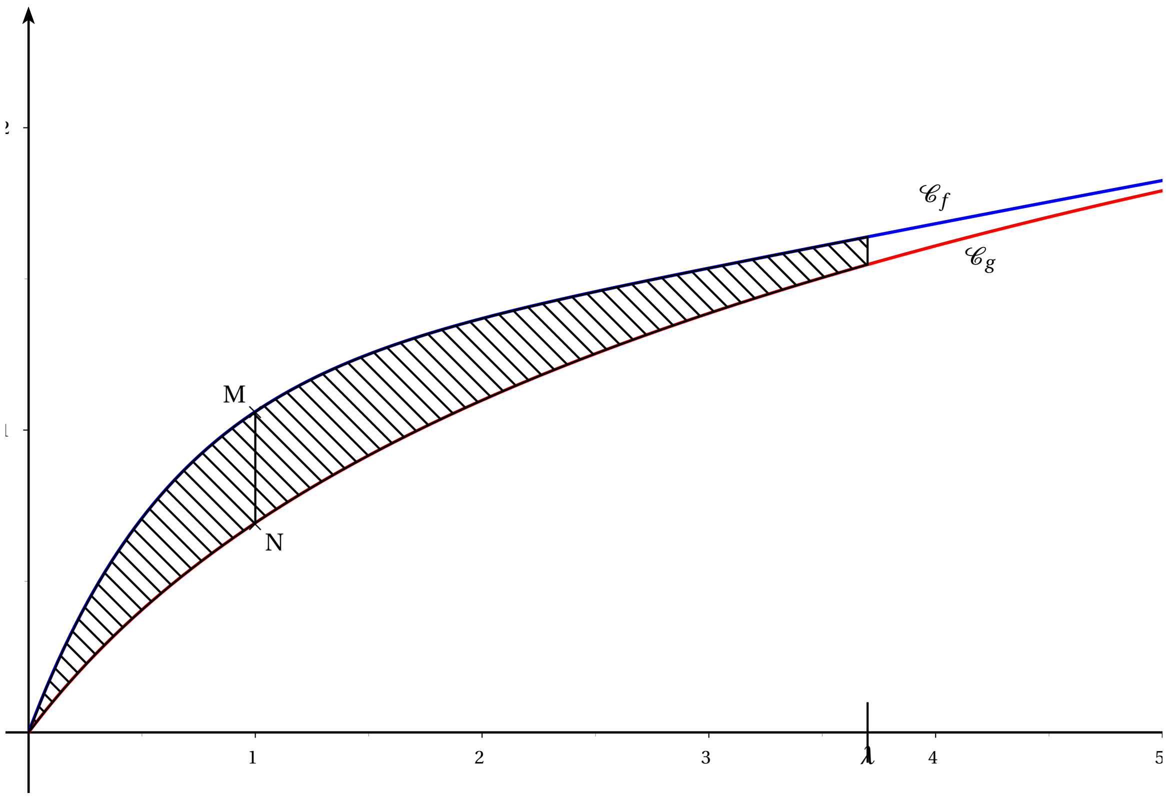
$$f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+\ln(x+1)\qquad\text{et}\qquad g(x)=\ln(x+1).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé.

1. Pour un nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées (x; f(x)) et N le point de coordonnées (x; g(x)) : M et N sont donc les points d'abscisse $x$ appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   (a) M et N ont la même abscisse et $f(x)\geqslant g(x)$ (car $x+1\geqslant 1$ donc $\ln(x+1)\geqslant 0$).
   D'où $MN=f(x)-g(x)=x\mathrm{e}^{-x}=h(x)$ : $\boxed{\mathrm{MN}=h(x)=x\mathrm{e}^{-x}}$.

   (b) D'après l'étude des variations de $h$, MN est maximum pour $x=1$.




2. Soit $\lambda$ un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note $D_\lambda$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

   (a) Hachurons le domaine $D_\lambda$. correspondant à la valeur $\lambda$ proposée sur le graphique. (voir ci-dessus)

   (b) $A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - h(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x) = H(\lambda) - H(0) = -(\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda} - (-1)$
   $= 1 - (\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^\lambda}$ :

   $$\boxed{A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{\mathrm{e}^\lambda}}.$$

   (c) $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$.

   $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^\lambda}\right) = 0$ (croissances comparées).

   Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 1}$.

   L'aire entre les deux courbes (pour $0 \leqslant x$) vaut 1.

3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | |
| | $\lambda$ est un réel positif |
| | $S$ est un réel strictement compris entre 0 et 1. |
| **Initialisation :** | |
| | Saisir $S$ |
| | $\lambda$ prend la valeur 0 |
| **Traitement :** | |
| | Tant Que $1 - \dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^\lambda} < S$ faire |
| | $\lambda$ prend la valeur $\lambda + 1$ |
| | Fin Tant Que |
| **Sortie :** | |
| | Afficher $\lambda$ |

(a) À la calculatrice, on obtient :

| $\lambda$ | $1-\dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,264241118 |
| 2 | 0,59399415 |
| 3 | 0,800851727 |

**L'algorithme affichera donc 3**.

(b) L'algorithme calcule la plus petite valeur entière de $\lambda$ pour laquelle $A_\lambda > S$.

## IV Antilles-Guyane septembre 2017

**Partie A**

Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc la courbe admet la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ :
$f'(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$ :
$f'(x)>0 \iff \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}>0 \iff 1-\ln(x)>0 \iff 1>\ln(x) \iff \mathrm{e}>x \iff x<\mathrm{e}$
Donc la fonction $f$ est : strictement croissante sur $[1\,;\,\mathrm{e}[$ ;
strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\underset{\cdot}{x}$ pour tout entier naturel $n$.

1. $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\underset{\cdot}{x}\int_1^2 f(x)\underset{\cdot}{x}$
$\dfrac{1}{x}\ln(x)$ est de la forme $u'u$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$ ; donc la fonction $f$ a pour primitive sur $[1\,;\,2]$ la fonction $F$ définie par $F(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^2$.
Donc $u_0=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\underset{\cdot}{x}=\Big[F(x)\Big]_1^2=F(2)-F(1)=\frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2-\frac{1}{2}\left[\ln(1)\right]^2=\frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2$
La fonction $f$ est positive sur $[1\,;\,2]$ donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ln(x)\underset{\cdot}{x}$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
2. Pour tout $x$ de $[1\,;\,2]$ : $1\leqslant x\leqslant 2$
$\iff \ln(1)\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(2)$ la fonction ln est croissante sur $[1\,;\,2]$
$\iff 0\leqslant\ln(x)\leqslant\ln(2)$
$\iff 0\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ $\dfrac{1}{x^{n+1}}>0$ sur $[1\,;\,2]$
3. On a $0\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :
$\displaystyle\int_1^2 0\underset{\cdot}{x}\leqslant\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\underset{\cdot}{x}\leqslant\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\underset{\cdot}{x}$ ou encore $0\leqslant u_n\leqslant\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\underset{\cdot}{x}$.
On calcule $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\underset{\cdot}{x}=\ln(2)\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\underset{\cdot}{x}$.
Pour $n>0$, la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x^{n+1}}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto-\dfrac{1}{nx^n}$.

Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{n\times 2^n}\right) - \left(-\frac{1}{n\times 1^n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n\times 2^n} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Donc, pour tout entier naturel $n>0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

4. On cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(2)}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n} = 0\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

On a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout $n$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 0$ ; on peut donc dire, d'après le théorème des gendarmes, que la suite $(u_n)$ est convergente et $\boxed{\text{a pour limite 0}}$.