Correction du sujet Nouvelle Calédonie mars 2015

1. (a) 2% des puces livrées ont une durée de vie courte, c'est-à-dire
   $P_L(C) = 0,02$.

   (b) On déduit que $P_L\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,02 = 0,98$ et
   $P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$.

   (c) Comme seules les puces livrées peuvent avoir une durée de vie courte on a :
   $P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] = P\left(\overline{L}\right) + P(L \cap C) = 0,05 + 0,019 = 0,069$.

2. (a) On sait que $P(X \leqslant 1\,000) = 0,02$.
   X suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc :
   $P(X \leqslant 1\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 0,02 \iff \mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 1 - 0,02 \iff$
   $\mathrm{e}^{-1\,000\lambda} = 0,98 \Rightarrow -1\,000\lambda = \ln 0,98 \iff \lambda = \dfrac{-\ln 0,98}{1\,000}$.

   (b) $P(X \geqslant 10\,000) = \mathrm{e}^{-10\,000\lambda} = \mathrm{e}^{-10 \ln 0,98} \approx 0,817$.
   Donc environ 81,7 % des puces ont une durée de vie supérieure ou égale à 10 000 heures.

   (c) $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000) = \mathrm{e}^{-20\,000\lambda} - \mathrm{e}^{-30\,000\lambda} \approx 0,122$.
   Soit : environ 12,2 % des puces ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3. (a) On effectue 15 000 tirages indépendants les uns des autres. La probabilité qu'une puce livrée ait une vie courte est $p = 0,003$.
   Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et $p = 0,003$..

   (b) $\mathrm{E}(Y) = n \times p = 15\,000 \times 0,003 = 45$.
   Il y a environ 45 puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites de la production.

   (c) On a $P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y < 40) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39)$.
   La calculatrice donne $P(Y \leqslant 50) \approx 0{,}7966$ et $P(Y \leqslant 39) \approx 0{,}2080$, donc :
   $P(40 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0{,}7966 - 0{,}2080 \approx 0,589$.