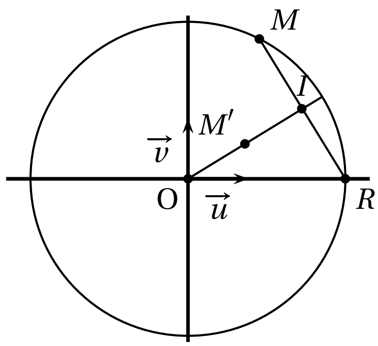
# Correction de l'exercice de bac Antilles-Guyane juin 2015

## Partie A




1. Puisque O$M$ = O$R$, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$.
   Comme $R$ a un argument égal à 0 à $2\pi$ près on a $z_R = |z|$.
2. $$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$
   L'affixe de $\frac{z+|z|}{2}$ est égale à la demi-somme des affixes de celles de $M$ et de $R$. Le point ayant cette affixe est donc le milieu $I$ du segment $[MR]$.
   Finalement le point $M'$ est le milieu de $[\text{O}I]$.

## Partie B

1. Si $z_0$ est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où
   $z_1 = \frac{z_0+|z_0|}{4} = \frac{z_0-z_0}{4} = 0$ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.
2. Si $z_0$ est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où
   $z_1 = \frac{z_0+|z_0|}{4} = \frac{z_0+z_0}{4} = \frac{z_0}{2}$, puis
   $z_2 = \frac{z_1+|z_1|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2}+\frac{z_0}{2}}{4} = \frac{z_0}{4}$.
   Montrons par récurrence que
   $$z_n = \frac{z_0}{2^n}.$$
   **Initialisation** : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.
   **Hérédité** : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $z_p = \frac{z_0}{2^p}$ ; alors
   $z_{p+1} = \frac{z_p+|z_p|}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^p}+\frac{z_0}{2^p}}{4} = \frac{\frac{z_0}{2^{p-1}}}{2^2} = \frac{z_0}{2^{p+1}}$ : la relation est vraie au rang $p+1$.
   On a donc démontré que pour tout naturel $u_n = \frac{z_0}{2^n}$.
   La suite $(z_n)$ est donc une suite géométrique de premier terme $z_0$ et de raison $\frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0.
3. (a) D'après la première construction, le module de $z'_M$ est inférieur à celui de $z_M$. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0.
   (b) On sait (inégalité triangulaire que pour tous complexes $z_1$ et $z_2$, que
   $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.
   En appliquant cette inégalité à $\frac{z_n}{4}$ et à $\frac{|z_n|}{4}$, on obtient :
   $|z_{n+1}| \leqslant \left|\frac{z_n}{4}\right| + \left|\frac{|z_n|}{4}\right|$ ou encore
   $|z_{n+1}| \leqslant \frac{2\,|z_n|}{4}$ ou
   $$\boxed{|z_{n+1}| \leqslant \frac{|z_n|}{2}}.$$
   On montre de la même façon que précédemment par récurrence que $|z_n| \leqslant \frac{|z_0|}{2^n}$.
   La suite $\left(\frac{|z_0|}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui converge vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes la suite $(|z_n|)$ converge elle aussi vers 0.