Correction du devoir commun n° 2 - TS - 4 heures - 19/01/2019

Exercice 1 :

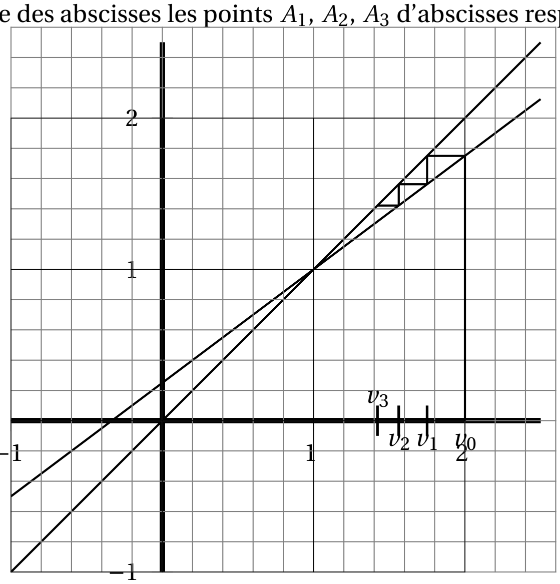
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ donné ci-dessous, on a tracé les droites d et Δ d'équations respectives :

$$d : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \Delta : y = x$$

En utilisant d et Δ, construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.



2. On trouve : $\boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{u_2 = \frac{7}{16}}$, $\boxed{u_3 = \frac{37}{64}}$, $\boxed{v_1 = \frac{7}{4}}$, $\boxed{v_2 = \frac{25}{16}}$, $\boxed{v_3 = \frac{91}{64}}$.

3. *a.* Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule les 100 premiers termes de la suite u_n :

```
Initialisation :
        u ← 0
        n ← 0
Traitement :
        Tant que n ⩽ 99
            n ← n + 1
            u ← (3 * u + 1)/4 ...
        Fin Tant que
```

b. Pour qu'il affiche chacun des termes calculés, il faut mettre « Afficher u »

c. Pour qu'il affiche seulement le dernier terme, il faut mettre « Afficher u » après Fin Tant que.

4. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.

a. On trouve $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 2$; on conjecture que la suite (s_n) est constante.

b. Démontrons-le par récurrence :

- Initialisation : $s_0 = 2$; c'est vrai
- Hérédité : on suppose que $s_n = 2$ pour un entier n quelconque.
$s_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} + \dfrac{3v_n + 1}{4} = \dfrac{3(u_n + v_n) + 2}{4} = \dfrac{3 \times 2 + 2}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$ donc $s_{n+1} = 2$.
La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, $s_n = 2$ pour tout n.

5. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.

a. Pour tout n, $d_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{4} - \dfrac{3u_n+1}{4} = \dfrac{3(v_n-u_n)}{4} = \dfrac{3}{4}d_n$.

La suite (d_n) est géométrique, de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et d perrier terme $d_0 = 2$.

b. Puisque (d_n) est géométrique, on a $d_n = d_0 q^n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

c. On a : $\begin{cases} v_n + u_n = 2 \\ v_n - u_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{cases}$.

En additionnant, on trouve $2v_n = 2 + 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ d'où $v_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

En soustrayant : $2u_n = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc $u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

d. $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 2 :

Partie A :

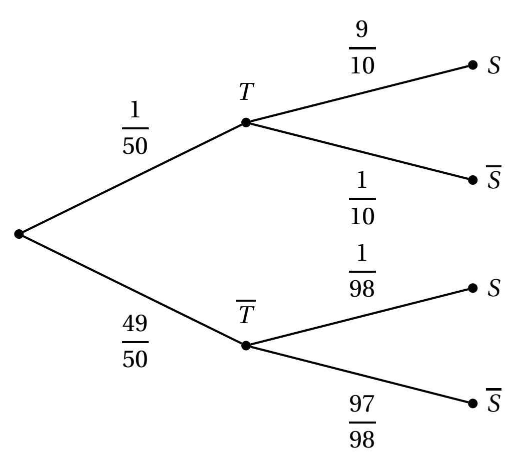
Dans toute cette partie, les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. En traduisant les renseignements à l'aide de T et S, on obtient :

- $\boxed{p(T) = \dfrac{1}{50}}$
- $\boxed{p\left(\overline{T}\cap S\right) = \dfrac{1}{100}}$
- $\boxed{p_T(S) = \dfrac{9}{10}}$

2. *a.* $p_{\overline{T}}(S) = \dfrac{p\left(\overline{T}\cap S\right)}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{50}} = \dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{49}{50}} = \dfrac{1}{100} \times \dfrac{50}{49} = \boxed{\dfrac{1}{98}}$

b. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



c. La probabilité que le système ne se déclenche pas mais que la température dépasse pourtant 500˚ C est :
$p\left(T\cap\overline{S}\right) = p_T\left(\overline{S}\right) \times p(T) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{50} = \dfrac{1}{500}$.

d. La probabilité que le système de sécurité se déclenche est :
$p(S) = p_T(S) \times p(T) + p_{\overline{T}}(S) \times p\left(\overline{T}\right)$ (formule des probabilités totales)
$= \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{100} = \dfrac{9}{500} + \dfrac{1}{100} = \dfrac{14}{500} = \dfrac{7}{250}$ donc $\boxed{p(S) = \dfrac{7}{250}}$.

3. Le système de sécurité vient de se déclencher. La probabilité que la température ait réellement dépassé 500°C est :
$p_S(T) = \dfrac{p(T\cap S)}{p(S)} = \dfrac{\frac{9}{500}}{\frac{7}{250}} = \dfrac{9}{500} \times \dfrac{250}{7} = \dfrac{9}{14}$ donc : $\boxed{p_S(T) == \dfrac{9}{14}}$

Partie B :

Le coût des anomalies est le suivant :

◇ 500 euros quand la température dépasse 500˚ C et que la sécurité se déclenche.

◇ 1500 euros quand la température dépasse 500˚ C et que la sécurité ne se déclenche pas.

◇ 100 euros lorsque la sécurité se déclenche par erreur.

On considère qu'il ne se produit pas plus d'une anomalie par jour.
On appelle X la variable aléatoire donnant le coût journalier des anomalies.

1. la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Événement	$\overline{S}\cap\overline{T}$	$\overline{S}\cap S$	$S\cap T$	$\overline{S}\cap T$
x_i	0	100	500	1 500
$p(X = x_i)$	$\dfrac{97}{100}$	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{9}{500}$	$\dfrac{1}{500}$

2. Le coût journalier moyen des anomalies correspond à l'espérance de X.
$E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} x_i\, p(X = x_i)$

$= \left(0 \times \dfrac{97}{100}\right) + \left(100 \times \dfrac{1}{100}\right) + \left(500 \times \dfrac{9}{500}\right) + \left(1\,500 \times \dfrac{1}{500}\right) = \boxed{13}$.

Le coût journalier moyen des anomalies est $\boxed{13 \text{ €}}$

Partie C :

Une étude a montré qu'un four d'une certaine marque, pris au hasard, présentait un problème technique dans 7 % des cas.

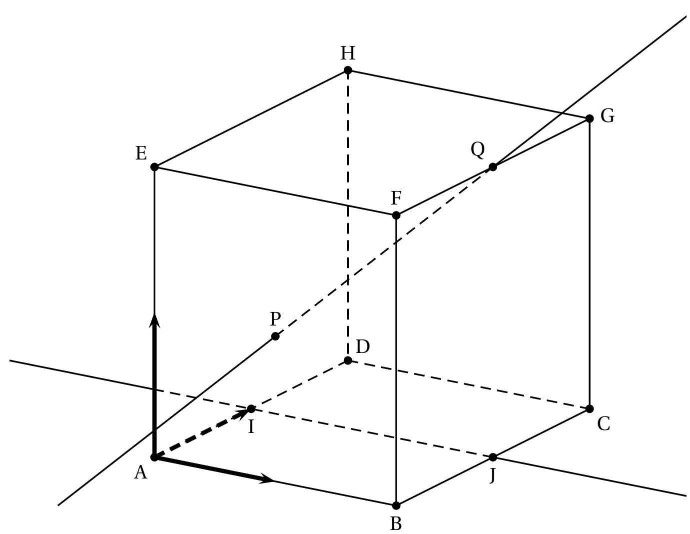
Une étude est réalisée auprès d'une usine fabriquant ces fours.
On prélève 200 fours et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fours présentant un problème technique.
Le nombre total de fours produits est supposé suffisamment grand pour pouvoir considérer l'étude des fours comme un tirage indépendant avec remise.

1. On a répétition d'expériences identiques indépendantes à deux issues.
   X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(200\ ;\ 0,07)$.
2. La probabilité que 10 fours présentent un problème technique est $p(X = 10) \approx 0,065$.
3. La probabilité qu'au moins 15 fours présentent un problème technique est $1 - p(X < 15) = 1 - p(X \leqslant 14)\ \boxed{\approx 0.430}$.
4. L'espérance est $np = 200 \times 0,07 = 14$; il y a en moyenne 14 fours subissant cette panne.
   L'entreprise doit s'attendre à dépenser $14 \times 90 = 1260$ € pour la réparation de ses fours.

Exercice 3 :

Soit ABCDEFGH le cube représenté ci-dessous.
On considère :

- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC] ;
- P le centre de la face ABFE, c'est-à-dire l'intersection des diagonales (AF) et (BE) ;
- Q le milieu du segment [FG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\ ,\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.
Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les coordonnées des points de la figure sans les justifier.
Ces points ont pour coordonnées :
A$(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$; B$(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$; D$(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$; E$(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$; C$(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$; F$(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$; H$(0\ ;\ 2\ ;\ 2)$; G$(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$; I$(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; J$(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$; P$(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et Q$(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.\ ,\quad r \in \mathbb{R}$

1. La droite (PQ) est l'ensemble des points M$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{PM} = t.\overrightarrow{PQ}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PM} = t.\overrightarrow{PQ} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 1\\ y &=& t\times 1\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$$

La droite (PQ) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}.$

Soient t un nombre réel et M $(1+t\ ;\ t\ ;\ 1+t)$ le point de la droite (PQ) de paramètre t.

2. (a) On admet qu'il existe un unique point K appartenant à la droite (IJ) tel que (MK) soit orthogonale à (IJ).
Les coordonnées de K sont de la forme $\left(r\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.
Les droites (IJ) et (MK) sont orthogonales donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont orthogonaux; leur produit scalaire est donc nul.
$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(2-0\ ;\ 1-1\ ;\ 0-0\right) = \left(2\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, et $\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $\left(x_{\text{K}}-x_{\text{M}}\ ;\ y_{\text{K}}-y_{\text{M}}\ ;\ z_{\text{K}}-z_{\text{M}}\right) = \left(r-1-t\ ;\ 1-t\ ;\ -\right.$
$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0 \iff 2(r-1-t)+0(1-t)+0(-1-t) = 0 \iff r = 1+t$
Le point K a donc pour coordonnées $\left(1+t\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

(b) D'après la question précédente, le vecteur $\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1-t\ ;\ -1-t\right)$ donc $\text{MK} = \sqrt{0^2+(1-t)^2+(-1-t)^2} = \sqrt{1-2t+t^2+1+2t+t^2} = \sqrt{2+2t^2}$.

3. (a) Les trois points H, G et B ne sont pas alignés donc ils définissent le plan (HGB).
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $y-z=0$.
$y_{\text{H}}-z_{\text{H}} = 2-2 = 0$ donc le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.
$y_{\text{G}}-z_{\text{G}} = 2-2 = 0$ donc le point G appartient au plan $\mathscr{P}$.
$y_{\text{B}}-z_{\text{B}} = 0-0 = 0$ donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est donc le plan (HGB) ce qui veut dire que le plan (HGB) a pour équation cartésienne $y-z=0$.

(b) On admet qu'il existe un unique point L appartenant au plan (HGB) tel que (ML) soit orthogonale à (HGB).
On suppose que le point L a pour coordonnées $\left(1+t\ ;\ \dfrac{1}{2}+t\ ;\ \dfrac{1}{2}+t\right)$.

- $y_{\text{L}}-z_{\text{L}} = \dfrac{1}{2}+t-\left(\dfrac{1}{2}+t\right) = 0$ donc L $\in$ (HGB).
- Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ a pour coordonnées
$\left(1+t-(1+t)\ ;\ \dfrac{1}{2}+t-t\ ;\ \dfrac{1}{2}+t-(1+t)\right) = \left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées $\left(2-0\ ;\ 2-2\ ;\ 2-2\right) = \left(2\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.
$\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{HG} = 0\times 2+\dfrac{1}{2}\times 0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{ML}\perp\overrightarrow{HG}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ a pour coordonnées $\left(2-0\ ;\ 0-2\ ;\ 0-2\right) = \left(2\ ;\ -2\ ;\ -2\right)$.
$\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{HB} = 0\times 2+\dfrac{1}{2}\times(-2)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 2 = 0-1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{ML}\perp\overrightarrow{HB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HB}$ non colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est orthogonal au plan (HGB).
Si L a pour coordonnées $\left(1+t\ ;\ \dfrac{1}{2}+t\ ;\ \dfrac{1}{2}+t\right)$, alors L appartient au plan (HGB) et la droite (ML) est orthogonale au plan (HGB).

(c) Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$; ces coordonnées ne dépendent pas de t donc la distance ML ne dépend pas de t.
$\text{ML} = \sqrt{0^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. La distance MK est égale à ML si et seulement si $\sqrt{2+2t^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ce qui équivaut à $2+2t^2 = \dfrac{1}{2}$ ou encore $2t^2 = -\dfrac{3}{2}$.
L'équation $2t^2 = -\dfrac{3}{2}$ n'a pas de solution donc il n'existe pas de valeur de t pour laquelle les distances MK et ML sont égales.

Exercice 4 :

L'objectif de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$$

Soit $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthogonal du plan. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$$

1. • Limite de $-\infty$: $g(x) = x^3\left(-4 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right) = -4$ donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

   • Limite en $+\infty$: même factorisation ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right) = -4$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$; $g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)$ qui a pour racines -2 et 0.
   $g'(x)$ est un polynôme des second degré, qui est négatif (du signe du coefficient de x^2, -12), à l'extérieur de l'intervalle formé par le racines.
   Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2	↘	$-\infty$

3. • Sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\ +\infty\right[$, $g(x)$ est négatif d'après le tableau de variation.

   • Sur $\left[-\infty\,;\ -\frac{1}{2}\right]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (donc $g(x)$ prend des valeurs positives), $g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ et g est continue (polynôme).
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une solution sur cet intervalle ; comme g est mondaine, cette solution est unique.. on la note α.

4. À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -1,137$.

5. On en déduit le signe de g sous forme de tableau :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B : étude de la fonction f

1. $x \mapsto x^3$ est croissante donc $x^3 - 1$ ne s'annule que pour $x = 1$ d'où $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. • Limte en $-\infty$: on a une forme indéterminée : on factorise par les termes de plus haut degrés pour lever l'indétermination.
   $f(x) = \dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = 1$.
   Par produit et quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   • Liite en $+\infty$; on effectue la même factorisation et on trouve la même limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   • Limite en 1 :
   $\lim\limits_{x\to1}(2x+1) = 3$; $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3-1\right) = 0$.
   Si $x < 1$, $x^3 - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.• $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ ou $+\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est symptôme à la courbe $\mathscr{C}$.

4. g est dérivable comme quotient de fonction dérivables.
$g'(x) = \dfrac{2\left(x^3-1\right) - 3x^2\,(2x+1)}{\left(x^3-1\right)^2} = \dfrac{2x^3 - 2 - 6x^3 - 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} = \dfrac{g(x)}{\left(x^3-1\right)^2}$.

5. Le dénominateur est positif : $f'(x)$ est donc du signe du numérateur $g(x)$ étudié précédemment.
Tableau de variation :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

6. l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$ donc $\boxed{y = -2x - 1}$.

7. $f(x) - (-2x-1) = \dfrac{2x+1}{x^3-1} - (-2x-1) = \dfrac{2x+1-\left(x^3-1\right)(-2x-1)}{x^3-1} = \dfrac{2x+1+2x^4+x^3-2x-1}{x^3-1} = \dfrac{2x^4+x^3}{x^3-1} = \dfrac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$.
Le numérateur s'annule en 0 et en $-\dfrac{1}{2}$.
Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	l	$+$	||	$+$	
x^3-1		$-$		$-$			||	$+$	
$\dfrac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

$\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente pour $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup [0\,;\,1[$ et au-dessus pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right] \cup]1\,;\,+\infty[$.

Voilà la courbe, qui était pas demandée :