TS : correction du DM nº 2

I

Raisonnons par l'absurde. Supposons que (u_n) ne soit pas majorée par ℓ. Il existe alors un rang p tel que $u_p > \ell$. Comme la suite (u_n) est croissante, tous les termes de rang $n \geqslant p$ sont supérieurs à ℓ.
$\forall n \geqslant p$, $\ell < u_p \leqslant u_n$ donc $u_n - \ell > u_p - \ell$ qui est un nombre fixe, donc $u_n - \ell$ ne peut pas tendre vers 0 !
Plus précisément, notons $\epsilon = \dfrac{u_p - \ell}{2}$. Soit I l'intervalle $I =]\ell - \epsilon\ ;\ \ell + \epsilon[$.
$\forall n \geqslant p$, $u_n \notin I$ donc la suite (u_n) ne converge par vers ℓ.
$(\ell - \epsilon < \ell < \ell + \epsilon < u_p \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant p)$. **2 pts**

II

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$.

1. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1\ ;\ 1]$ donc $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$; les nombres $\cos n$ sont bornés par -1 et 1.
2. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n=1}.$$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$.
D'après le théorème des gndarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2 pts

III

(u_n) est une suite convergente.

FAUX : La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'est pas toujours convergente. C'est le cas quand $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ est alors $\pm\infty$ ou n'a pas de limite (donc la suite diverge). **1 pt**

IV

On considère une suite arithmético-géométrique (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels non nuls et $a \neq 1$.

1. $f(x) = x \Leftrightarrow ax + b = x \Leftrightarrow (1-a)x = b \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$ (qui existe puisque $a \neq 1$).
On a donc $\beta = \dfrac{b}{1-a}$. **0,5 pt**
2. Puisque β est le point fixe de f, on a : $\beta = a\beta + b$.
On définit alors une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = u_n - \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \beta = a\beta + b \end{cases}$.
Par soustraction, on obtient :
$a\left(u_n - \beta\right) = a\left(u_n - \beta\right)$ donc $v_{n+1} = av_n$.
(v_n) est donc géométrique, de raison $q = a$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \beta$ **1 pt**
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ donc
$\boxed{v_n = \left(u_0 - \beta\right) a^n}$.
Or $v_n = u_n - \beta$, donc $u_n = \beta + v_n$ d'où
$$\boxed{u_n = \beta + \left(u_0 - \beta\right) a^n}.$$

0,5 pt

4. **Application** : soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 7 \end{cases}$.

   On a $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = -7$.

   $a \neq 1$ donc on peut appliquer les résultats précédents. $\beta = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-7}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{-7}{\frac{2}{3}} = \boxed{-\dfrac{21}{2}}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{21}{2} + \left(4 - \left(\dfrac{21}{2}\right)\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \boxed{-\dfrac{21}{2} + \dfrac{29}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ **0,5 pt**

5. $-1 < a = \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta = -\dfrac{21}{2}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{21}{2}}$. **0,5 pt**

V Suites mêlées

On considère les suites mêlées (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = -10$, $v_0 = 20$ et : $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}7u_n + 0{,}8v_n \\ v_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}7v_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) $u_1 = 0,7u_0 + 0,8v_0 = -7 + 16 = 9$
   $v_1 = 0,8u_0 + 0,7v_0 = -8 + 14 = 6$
   $u_2 = 0,7u_1 + 0,8v_1 = 6,3 + 4,8 = 11,1$
   $v_2 = 0,8u_1 + 0,7v_1 = 7,2 + 4,2 = 11,4$. **0,5 pt**

   (b)
   - $u_1 - u_0 = 19$ et $u_2 - u_1 = 2,1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $v_1 - v_0 = -14$ et $v_2 - v_1 = 5,4 \neq v_1 - v_0$ donc (v_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} = -\dfrac{9}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} > 0$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$: (u_n) n'est donc pas géométrique.
   - $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{11,4}{6} \neq \dfrac{v_1}{v_0}$ donc $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$; (v_n) n'est donc pas géométrique. **1 pt**

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$
   $= 0,15u_n + 0,15v_n = 0,15\,(u_n + v_n)$
   $= \boxed{0,15a_n}$ donc la suite (a_n) est **géométrique** de raison $q = 0,15$ et de premier terme $a_0 = u_0 + v_0 = 10$. **1 pt**

   (b) On en déduit que $a_n = a_0q^n = 10 \times 1,5^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ car $1,5 > 1$. **0,5 pt**

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$
   $= -0,1u_n + 0,1v_n = -0,1\,(u_n - v_n) = 0,1b_n$ donc la suite (b_n) est **géométrique** de raison $q' = -0,1$ et de premier terme
   $b_0 = u_0 - v_0 = -30$. **1 pt**

   (b) On en déduit que $\boxed{b_n = -30 \times (-0,1)^n}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0}$ car $-1 < q' = 0,1 < 1$. **0,5 pt**

   (c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ? On a $u_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

   De même, $v_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

4. $u_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) = \dfrac{1}{2}\left(10 \times 1,5^n - 30 \times (-0,1)^n\right) = \boxed{5 \times 1,5^n - 15 \times (-0,1)^n}$.
   $v_n = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) = \dfrac{1}{2}\left(10 \times 1,5^n + 30 \times (-0,1)^n\right) = \boxed{5 \times 1,5^n + 15 \times (-0,1)^n}$. **0,5 pt**

5. $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[10\times 1,5^k - 30\times(-0,1)^k\right]$
$= 5\sum_{k=0}^{n} 1,5^k - 15(-0,1)^k$
$= 5\times\frac{1,5^{n+1}-1}{1,5-1} - 15\times\frac{1-(-0,1)^{n+1}}{1-(-0,1)}$
$= 10\left(1,5^{n+1}-1\right) + \frac{15}{1,1}\left(1-(-0,1)^{n+1}\right).$

$\lim_{n\to+\infty} 1,5^{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(-0,1)^{n+1} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty}$ **1 pt**

VI

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) $u_1 = \frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$.

   $u_2 = \frac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{9}{10}}$. **0,5 pt**

   (b) Démontrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

   - **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : supposons la propriété vraie à un rang n quelconque.
     Alors $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ puisque
     $u_n > 0$; la propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. **1 pt**

2. Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, **1 pt**
   $u_n < 1$.
   - Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} < 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
   - Hérédité : on suppose que, pour un entier n quelconque, la propriété es vraie donc que $u_n < 1$.
     Alors : $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{1+2u_n} = \frac{u_n - 1}{1+2u_n} < 0$ car $u_n < 1$ donc $u_n - 1 < 0$ et $1 + 2u_n > 0$
     puisque $u_n > 0$; la propriété est donc héréditaire. **1 pt**

3. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n$
   $= \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \boxed{\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0}$ car $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$ puisque $u_n < 1$.
   Le suite (u_n) est donc **croissante**.

   0,5 pt

4. La suite (u_n) est croissante majorée par 1, donc elle **converge** vers une limite ℓ avec $\ell \leqslant 1$. **0,5 pt**

5. Soit(v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$

$= \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}$

$= \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \times \dfrac{1+2u_n}{1-u_n} = 3 \times \dfrac{u_n}{1-u_n} = \boxed{3v_n}$.

Pour tout n, $v_{n+1}3v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = 1$ **1 pt**

(b) Puisque (vn) est géométrique de raison 3, on en déduit $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.

(c) $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n - u_n v_n = u_n$

$\Leftrightarrow v_n = u_n v_n + u_n \Leftrightarrow v_n = u_n(1+uv_n)$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} = \boxed{\dfrac{3^n}{1+3^n}}$ **0,5 pt**

(d) $v_n = \dfrac{3^n}{3^n\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ (car 3>1) donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

La suite (u_n) **converge vers 1**. **0,5 pt**