TS : devoir nº 1

I (3 points)

Soit l'équation $2x^4 - 11x^2 + 15 = 0$
On pose $X = x^2$.
Alors : $2x^4 - 11x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ 2X^2 - 11X + 15 = 0 \end{cases}$.
On résout : $2X^2 - 11X + 15 = 0$; $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 2 \times 15 = 121 - 120 = 1 > 0$.
L'équation a deux solutions : $X_1 = \dfrac{11 - \sqrt{1}}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $X_2 = \dfrac{11 + \sqrt{1}}{4} = 3$.
On revient à l'équation initiale en résolvant $x^2 = X_1$ et $x^2 = X_2$.

- $x^2 = X_1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{5}{2}$ qui a pour solutions $-\dfrac{\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $x^2 = 3$ a pour solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{3}\,;\, -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\,;\, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,;\, \sqrt{3}\right\}}$.

II (3 points)

Résoudre soigneusement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$1 \leqslant \frac{9}{(x+3)^2}$$

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- On suppose que $x \in \mathscr{D}$.
  Alors : $1 \leqslant \dfrac{4}{(x+3)^2} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{(x+3)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2 - 4}{(x+3)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3+2)(x+3-2)}{(x+3)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2} \leqslant 0$
- Le numérateur s'annule en -1 et -5 ; c'est un polynôme du second degré ; il est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, donc négatif entre ces deux racines.
- Sur $\mathscr{D}$, le dénominateur est positif (carré d'un réel) donc la fraction est du signe du numérateur.
  On renseigne alors un tableau signes :

x	$+\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$(x+5)(x+1)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = [-5\,;\,-3[\cup]-3\,;\,-1]}$

III (3 points)

Soit P_n la propriété : Pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.
Effectuons une démonstration par récurrence :

- **Initialisation** : pour $n = 4$, $n! = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $n^2 = 4^2 = 16$ donc $4! \geqslant 4^2$; la propriété est vraie au rang $n = 4$

- **Hérédité** : on suppose qu'il existe un sentier n quelconque, $(n \geqslant 4)$ tel que $n! \geqslant n^2$.
  Alors : $(n+1)! = n! \times (n+1) \geqslant n^2 \times (n+1)$ car $n! \geqslant n^2$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Reste à montrer que $n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - n - 1 \geqslant 0$.
  Le minimum de $x^2 - x - 1$ est atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$ et la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ est croissante pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $x \geqslant 4$, $f(x) \geqslant f(4) = 11 > 0$ donc, pour $n \geqslant 4$, $n^2 - (n+1) \geqslant 0$ d'où $n^2 \geqslant n+1$. On en déduit $n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$ d'où $(n+1)! \geqslant (n+1)^2$.
  La propriété est bien **héréditaire**.

  D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

IV (2 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On sait que $u_{102} = 47$ et $u_{157} = 25$.

- On sait que, pour tout $p \leqslant n$, $u_n = u_p + (n-p)r$ donc $r = \dfrac{u_n - u_p}{n-p}$.

  Alors : $r = \dfrac{u_{157} - u_{102}}{157 - 102} = \dfrac{25 - 47}{55} = -\dfrac{22}{55} = \boxed{-\dfrac{2}{5}}$ (en simplifiant par 11).

- $u_{102} = u_0 + 102r$ donc $u_0 = u_{102} - 102r = 47 - 102 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{439}{5}$ donc $\boxed{u_0 = \dfrac{439}{5}}$.

- Alors : $u_{3000} = \dfrac{439}{5} + 3\,000 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right) = \boxed{-\dfrac{5\,561}{5}}$.

V (2 points)

Soit (v_n) une suite géométrique de raison réelle q.
On sait que $v_3 = 12$ et $v_6 = 324$.

1. $v_6 = v_3 q^3$ donc $q^3 = \dfrac{v_6}{v_3} = \dfrac{324}{12} = 27$. On en déduit que $\boxed{q = 3}$.
2. $v_4 = v_3 q = 12 \times 3 = 36$: $\boxed{v_4 = 36}$.
   $v_7 = v_6 \times q = 324 \times 3 = 972$; $\boxed{v_7 = 972}$
   $v_0 = \dfrac{v_3}{q^3} = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$; $\boxed{v_0 = \dfrac{4}{9}}$

VI (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. $u_0 = \boxed{10}$; $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 1 = \boxed{6}$; $u_2 = \boxed{4}$; $u_3 = \boxed{3}$.
2. Il semble que la suite soit **décroissante**.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 1$ est une fonction affine de coefficient directeur $\dfrac{1}{2} > 0$ donc f est **croissante**.
4. Démontrons **par récurrence** que la suite est décroissante.
   Soit P_n la propriété $u_{n+1} < u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : $u_1 = 6 < u_0$ donc P_0 est vraie.
- Hérédité : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
  Comme f est croissante, f respecte l'ordre, donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$; on en déduit que P_{n+1} est vraie.
  La propriété P_n est donc héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (u_n) est bien **décroissante**.

VII (4 points)

On considère la fonction $f \longmapsto x + \dfrac{1}{x-2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

1. L'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
2. À l'aide de la calculatrice, on conjecture que :
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$
3. f est dérivable somme somme et quotient de fonction dérivables.
   $f = u + \dfrac{1}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = x - 2 \end{cases}$.
   $f' = u' + \left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' + \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   on en déduit : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 1^2}{(x-2)^2} = \dfrac{(x_2-1)(x-2+1)}{(x-2)^2} = \boxed{\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}}$.
4. Le dénominateur est positif (carré d'un réel) donc $f'(x)$ est du signe du numérateur. Celui-ci est un polynôme du second degré, du signe du coefficient de x^2 donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines 1 et 3 et négatif entre les racines.
   On en déduit le tableau de variation.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		4		

5. **Question facultative** :
   On appelle g la fonction définie par $g(x) = x$ et $\mathscr{D}$ la courbe représentative de g.

(a) $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ et $\lim\limits_{x\to =\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ se rapprochent infiniment près ; on dit que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

(b) $\forall x \neq 2,\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0$ pour $x > 2$ et $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-2} < 0$ pour $x < 2$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ pour $x < 2$ et au-dessus pour $x > 2$.

(c) Graphique :