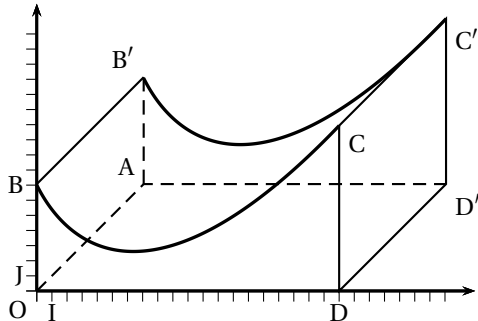


Correction du devoir commun n°3

Exercice I (6 points)



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. $f = u\ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.

f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

$$f' = u' \ln(u) + u \times \frac{u'}{u} + v' \text{ avec } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = -3 \text{ d'où } f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 \text{ donc}$$

$$f'(x) = \ln(x+1) - 2.$$

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1 = e^2 \iff x = e^2 - 1.$

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > e^2 \text{ (croissance de la fonction exp) d'où } x > e^2 - 1.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	-	\emptyset	+
$f(x)$	7	$f(e^2 - 1) \approx 2,6$	$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2.$

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1).$

g est donc une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1).$

Une primitive de $x \mapsto 3x+7$ est $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + 7x.$

Une primitive de f est donc définie par : $F(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13}{2}x.$

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes? Justifier les réponses.

P_1 : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f(e^2 - 1) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie**;

P_2 : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en C est $f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.

2. f est continue, donc l'aire de la face avant, en unités d'aire, vaut

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{20} f(x) dx = F(20) - F(0).$$

$$F(20) = \frac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570.$$

$$F(0) = 0.$$

On en déduit $\mathcal{A}_1 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101,3$.

L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(OAB'B) = 10f(0) = 70$.

L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(DD'C'C) = 10f(20) \approx 109,3$.

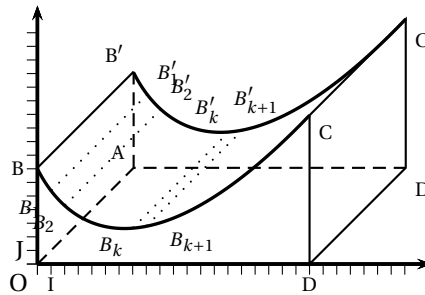
L'aire à peindre en rouge est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \approx 381,9 \text{ m}^2$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\frac{381,9}{5} \approx 771$

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.



(a) $B_k B_{k+1} = \sqrt{1^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

(b) La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

Afficher S

Exercice II (4 points)

Une suite numérique (u_n) est définie par son premier terme $u_1 = 2$ et par la relation. de récurrence, valable pour $n \geq 1$:

$$\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\ln(u_n) + \ln \left(\frac{n}{(n+1)^2} \right) \right).$$

1. $\forall n \geq 1, \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\ln(u_n) + \ln \left(\frac{n}{(n+1)^2} \right) \right) \Leftrightarrow \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{nu_n}{(n+1)^2} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{nu_n}{(n+1)^2}} \right)$ donc $u_{n+1} = \sqrt{\frac{nu_n}{(n+1)^2}}$.

• **Par récurrence**, on montre facilement que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $\ln(u_{n+1})$ est défini, donc la suite (u_n) est bien définie.

• Montrons par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.

— $u_1 = 2 \leq 2$ donc la propriété est **initialisée**.

— Supposons $u_n \leq 2$ pour une valeur de n quelconque.

Alors : $nu_n \leq 2n$ donc $\frac{nu_n}{(n+1)^2} \leq \frac{2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - (n^2 + 1)}{(n+1)^2} = 1 - \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2} \leq 1$ donc $u_{n+1} = \sqrt{\frac{nu_n}{(n+1)^2}} \leq \sqrt{1} = 1 \leq 2$.

Autre façon : $\frac{2n}{(n+1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow 2n \geq 2(n+1)^2 \Leftrightarrow 2n \leq 2n^2 + 4n + 2 \Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 2 \geq 0$ qui est évident car $n \in \mathbb{N}$.

La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2$.

2. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = nu_n$ puis $w_n = \ln(v_n)$.

Pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln((n+1)u_{n+1}) = \ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) = \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln((n+1)^2)$
 $= \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \ln(n) - \ln((n+1)) = \frac{1}{2} [\ln(u_n) + \ln(n)] = \frac{1}{2} \ln(nu_n) = \frac{1}{2} w_n$ donc la suite (w_n) est **géométrique** de raison $q = \frac{1}{2}$.

3. $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

$v_n = e^{w_n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

$v_n = nu_n$ donc $u_n = \frac{v_n}{n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4. Soit $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

(w_n) est une suite géométrique donc $S_n = w_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \ln(2) \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \ln(2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$S_n = 2 \ln(2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Exercice III (5 points)

1. $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2z + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases}$.

• Résolvons $z^2 - 2z + 4 = 0$:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$.

L'équation a deux solutions complexes conjuguées : $\frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.

• Résolvons $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2$

. Cette équation a deux solutions : $2i$ et $-2i$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$\mathcal{S} = \{1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}; 2i; -2i\}$.

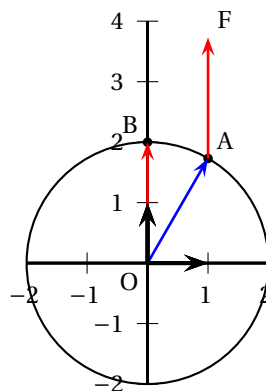
2. (a) • $|z_A|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.

On peut écrire $z_A = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ soit en écriture exponentielle : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

• $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On a donc avec les modules $OA = OB = 2$: A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

(b)



$$(c) \text{ On a } \frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$\text{Or } (\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

3. (a) $z_{\vec{OB}} = z_B$; $z_{\vec{AF}} = z_F - z_A = z_A + z_B - z_A = z_B$ donc $\vec{OB} = \vec{AF}$.

$OAFB$ est donc un parallélogramme. $OA = OB$: le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

(b) $OAFB$ est un losange donc la droite (OF) est la bissectrice de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) ; donc une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OF}) est $\frac{\pi}{12}$.

$$\text{D'après la relation de Chasles } (\vec{u}, \vec{OF}) = (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OF}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$$

$$(c) \text{ On a } z_F = z_A + z_B = 1 + i\sqrt{3} + 2i = \boxed{1 + i(\sqrt{3} + 2)}$$

$$\text{Donc } |z_F|^2 = 1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2 = 1 + 3 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{Donc } |z_F| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Or 'un argument de z_F est $\frac{5\pi}{12}$ puisque $(\vec{u}; \vec{OF}) = \frac{5\pi}{12}$ (d'après 3.(b)), donc l'écriture trigonométrique de z_F est :

$$\boxed{z_F = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)}$$

(d) On a vu que la partie réelle de z_F est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$$1 = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12} \iff \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \times (4 - 3)} = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}$$

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6} > \sqrt{2}$); comparons leurs carrés :

$$\bullet \left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4};$$

$$\bullet \left[\frac{\sqrt{6 - \sqrt{2}}}{4} \right]^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4(2 - \sqrt{3})}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont **égaux**; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Exercice IV (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Pour $t = 0$ dans la représentation paramétrique de d_1 , on obtient $x = 2$; $y = 3$ et $z = 0$ donc **$A(2; 3; 0)$ appartient à d_1** .

2. On sait que dans la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de x , y et z donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.

On en déduit que $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2 .

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires donc les deux droites d_1 et d_2 ne sont **pas parallèles**.

3. Soit le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 1 + 2 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{v} \perp \vec{u}_1.$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 2 - 2 + 0 = 0 \text{ donc } \vec{v} \perp \vec{u}_2.$$

\vec{v} est bien orthogonal aux deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

4. Soit P le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v} .

On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P .

(a) Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 1 \times 5 + (-1) \times 4 + 1 \times (-1) = 5 - 4 - 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{u}_1.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 1 \times (-3) = 1 + 2 - 3 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{v}.$$

\vec{n} est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** de plan P donc \vec{n} est un vecteur normal à ce plan.

P passe par A donc une équation cartésienne de P est :

$$5(x - x_A) + 4(y - y_A) - (z - z_A) = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2) + 4(y - 3) - z = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0 : P \text{ a pour équation cartésienne } \boxed{5x + 4y - z - 22 = 0}$$

(b) On cherche l'intersection de d_2 et de P :

on injecte les expressions de x , y et z de la représentation paramétrique de d_2 dans l'équation cartésienne de P :

$$\text{On obtient : } 5(-5 + 2t') + 4(-1 + t') - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 14t' - 56 = 0 \Leftrightarrow t' = 4.$$

On remplace t' par 4 : on obtient $x = -5 + 2 \times 4 = 3$; $y = -1 + 4 = 3$ et $z = 5$.

d_2 et P ont un seul point commun : $\boxed{B(3; 3; 5)}$.

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, et passant par le point $B(3; 3; 5)$.

(a) Δ a pour représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - 2k \\ z = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}}$.

(b) On cherche si d_1 et Δ sont sécantes. Si c'est le cas, il existe t et k réels tels que :

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + k \\ 3 - t = 3 - 2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 5 - 3k = 3 + k \\ 3 + 3k - 5 = 3 - 2k \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ t = 5 - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

En remplaçant k par 1 ou t par 2, on obtient que les deux droites ont un seul point d'intersection : $\boxed{C(4; 1; 2)}$.

- (c) • D'après la question (3.) la droite Δ dirigée par le vecteur \vec{v} est orthogonale aux droites d_1 et d_2 .
 • D'après la question (5b.) les droites d_1 et Δ sont sécantes en un point $C(4; 1; 2)$.
 • Par ailleurs, le point $B(3; 3; 3)$ appartient à la droite Δ par définition (5.) et à la droite d_2 d'après la question (4b.)
 • Donc la droite Δ est sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites ce qui répond au problème posé.

Exercice V (3 points)

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fautive.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.

Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;

- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;

- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X , Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

(a) Anselme répond au hasard à chaque question donc il a une probabilité de répondre juste à une question de $p = \frac{1}{4}$.

Il y a 20 questions qui sont indépendantes donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bonnes réponses d'Anselme, donc sa note, suit la **loi binomiale** de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

(b) À l'aide de la calculatrice, l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$ est 0,014.

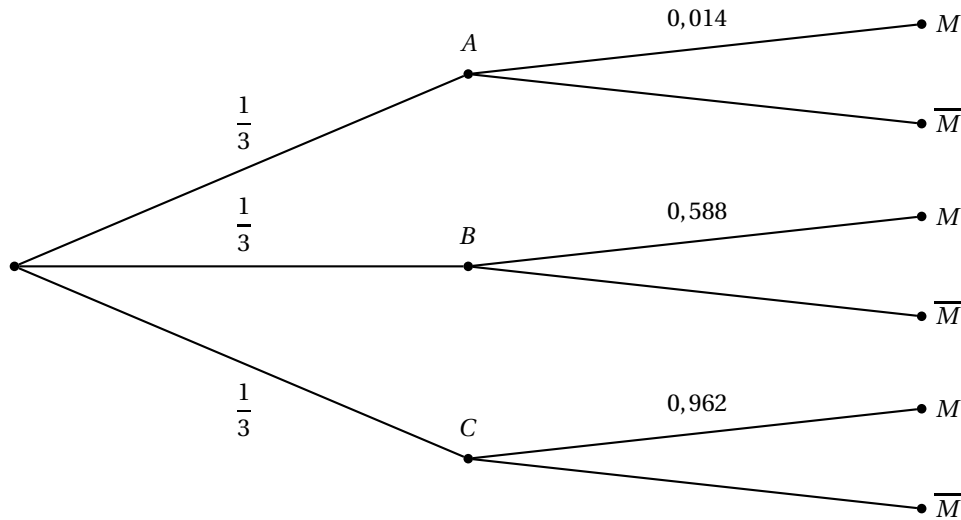
Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0,588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.

On note A , B , C et M les événements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

Traduisons la situation par un arbre pondéré :



On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

La probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara est $P_M(B)$ soit $\frac{P(B \cap M)}{P(M)}$.

- On choisit au hasard la copie d'un des trois candidats donc $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

- $P(B \cap M) = P(B) \times P_B(M)$.

D'après le contexte, $P_B(M) = P(Y \geq 10)$ donc $P(B \cap M) = \frac{1}{3} \times 0,588$.

- D'après la formule des probabilités totales

$$P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) = P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M)$$

$$= P(A) \times P(X \geq 10) + P(B) \times P(Y \geq 10) + P(C) \times P(Z \geq 10)$$

$$= \frac{1}{3} \times 0,014 + \frac{1}{3} \times 0,588 + \frac{1}{3} \times 0,962 = \frac{1,564}{3}$$

Donc $P_M(B) = \frac{0,588}{\frac{1,564}{3}}$ dont l'arrondi au millième est $0,376$.