TS : TD sur la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires

I

On note E la fonction partie entière.
La fonction $g : x \mapsto xE(x)$ est-elle continue en 0 ?

II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x + 5.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 8$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2 ; 3]$.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 - 2x + 5.$$

1. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver une encadrement de α à 10^{-3} près.
4. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

IV

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ [1].

Partie A : recherche du nombre de solutions

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche des solutions exactes

On cherche les solutions de l'équation [1] sous la forme $x = 2\cos\theta$, avec θ réel.

1. Démontrer que, pour tout réel θ,

$$\cos(3\theta) + 3\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta).$$

2. Démontrer que x est solution de [1] si, et seulement si, $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ [2].
3. Trouver les réels solutions de [2].
4. En déduire les valeurs exactes de solutions de l'équation [1].