

Exercice I

5 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.

On dispose des données suivantes :

- 20 % des voitures sont sous garantie;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les événements suivants :

- G : « la voiture est sous garantie »;
- R : « une réparation est nécessaire ».

- (a) Traduire la situation par un arbre pondéré.
 (b) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.
 (c) Justifier que $P(R) = 0,082$.
 (d) Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.

Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

- La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.

L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :

- si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit;
- si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.

Sachant que son parc automobile compte 2500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures?

On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours).

La directrice de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.

Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

- En supposant que l'affirmation de la directrice est correcte, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.
- Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice?

Partie C

On modélise le nombre de kilomètres parcourus par les clients louant une voiture pour une semaine par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance $\mu = 450$ et d'écart-type $\sigma = 100$.

- Quelle est la probabilité que le client louant la voiture pour une semaine roule entre 500 km et 600 km? On arrondira le résultat à 10^{-3} .
- La société de location souhaite faire une offre promotionnelle aux 15 % de ses clients parcourant le moins de kilomètres en une semaine.
 En-dessous de quel kilométrage hebdomadaire, arrondi à l'unité, un client sera-t-il concerné par cette offre?

Exercice II

6 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2.$$

- Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .
- On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et on note g' sa dérivée.
 Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
- En déduire le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .
- À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}.$$

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} .
- On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 On admet par ailleurs que, pour tout réel x , $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
 Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note \mathcal{D} le domaine compris entre la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f , la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

- Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{P} .
- On admet qu'une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)e^{x-4}.$$

Calculer l'aire du domaine \mathcal{D} en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

Exercice III

4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

- Soit \mathcal{E} l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z - 3| = |z + 3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble \mathcal{E} est le cercle de centre O et de rayon 3.

- On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n , les points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

- On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π .

Exercice IV

5 points

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

- Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
- Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
- Écrire un algorithme calculant u_{30} .

Partie B : Étude générale

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- Étudier les variations de la suite (u_n) .
- La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
- Justifier que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

- Déterminer la limite de la suite (u_n)
- On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , $u_n < 10^{-18}$. Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.