Devoir commun n° 1 - TS - 4 heures - 10/11/2018

Exercice 1 :

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. *a.* Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

   c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   a. Quelle est la loi de probabilités suivie par X ? Justifier soigneusement.

   b. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

   c. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

   d. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».
A partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	6				

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. *a.* Démontrer que (v_n) est une suite constante.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. *a.* En utilisant le résultat de la question **1.b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

   $$u_n < u_{n+1} < 15$$

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. *a.* Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

   d. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule et affiche le plus petit entier n tel que $|u_n - 7| < 10^{-4}$.

Initialisation :	
	$u \leftarrow 3$
	$n \leftarrow 0$
Traitement :	
	Tant que ...
	$n \leftarrow \ldots$
	$u \leftarrow \ldots\ldots$
	Fin Tant que
Sortie :	
	Afficher ...

   e. Quel est alors la valeur affichée par l'algorithme ?

<u>Exercice 3 :</u>

Une grenouille se déplace sur un étang sur lequel se situe trois nénuphars, notés A, B et C.
A chaque fois qu'elle est sur un nénuphar, la grenouille :

◇ soit reste sur ce nénuphar ;

◇ soit change de nénuphar.

Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel. On considère les évènements suivants :

◇ A_n : « la grenouille est sur le nénuphar A à l'étape n ».

◇ B_n : « la grenouille est sur le nénuphar B à l'étape n ».

◇ C_n : « la grenouille est sur le nénuphar C à l'étape n ».

On note $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

A l'étape $n = 0$, la grenouille est sur le nénuphar A.
Une étude a permis de modéliser les déplacements de la grenouille par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer sur quel nénuphar la grenouille a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

A l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position de la grenouille après un très grand nombre d'étapes ?

<u>Exercice 4 :</u>

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Existe-t-il des suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$? Justifier soigneusement.
2. Existe-t-il des suites (s_n) et (t_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_nt_n = 3$? Justifier soigneusement.
3. Soit (w_n) une suite convergente. La suite $\left(\frac{1}{w_n}\right)$ converge-t-elle ? Justifier soigneusement.
4. Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
   a. Soit une suite (v_n).
   Affirmation A : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,
   $$-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$
   alors la suite (v_n) converge.
   b. Soit (w_n) une suite convergente.
   Affirmation B : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.