Correction du TD

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.

1. f est dérivable ; $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+2\times\dfrac{1}{x}\right)$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(1+2\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)=\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2}\right)}$.
$f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\boxed{\sqrt{2}}$ (on dit que $\sqrt{2}$ est un point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x)=x$)
Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		$\sqrt{2}$	↘	‖	↘	$\sqrt{2}$	↗	

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)\end{cases}$.

   (a) $u_1=\boxed{\dfrac{17}{12}\approx 1{,}417}$; $u_2=f\left(u_1\right)=f\left(\dfrac{17}{12}\right)=\boxed{\dfrac{577}{408}\approx 1{,}41421568627}$

   (b) Démontrons, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{3}{2}$.

   - **Initialisation** : d'après ce qui précède, on a $\sqrt{2}\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant\dfrac{3}{2}$
   - **Hérédité** : on suppose que $\sqrt{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{3}{2}$ pour une valeur quelconque de n.

     D'après le tableau de variation de f, f est croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

     On en déduit : $f\left(\sqrt{2}\right)\leqslant f\left(u_{n+1}\right)\leqslant f\left(u_n\right)\leqslant f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, c'est-à-dire $\sqrt{2}\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant\dfrac{17}{12}\leqslant\dfrac{3}{2}$ donc la propriété est **héréditaire**.

   D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

   (c) Pour tout n, $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\left(u_n-\dfrac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{1}{u_n}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}u_n-2}{2u_n}=\dfrac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{2}\right)$.

   D'après la questions précédente, $u_n\geqslant\sqrt{2}$, donc $\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{2}\geqslant 0$.

   On en déduit $\boxed{u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)}$.

   (d) Montrons, par récurrence, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{2}\right)$.

- **Initialisation** : pour $n=0$, $0<u_0-\sqrt{2}$ et $u_n-\sqrt{2}=u_0-\sqrt{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{2}\right)=u_0-\sqrt{2}$ donc la propriété est vraie.
- **Hérédité** : on suppose que : $0<u_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{2}\right)$.

  D'après la question précédente, $u_{n+1}-\sqrt{2}=f\left(u_n\right)-f\left(\sqrt{2}\right)\geqslant u_n-\sqrt{2}$ puisque f est croisante sur $\left[\sqrt{2}\,;\,\frac{3}{2}\right]$
  et $u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{2}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(u_0-\sqrt{2}\right)$.
  La propriété est héréditaire

On en déduit que la propriété est vraie pour tout n.

(e) $-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{2}\right)=0$.

D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{2}\right)=0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}}$

II Antilles-Guyane juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0=0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1}=u_n+2n+2.$$

1. $u_1=u_0=2\times0+2=\boxed{2}$ et $u_2=u_1+2\times1+2=\boxed{6}$.
   (vérifier les réponses avec le tableau fourni plus loin!)
2. **Le second affiche en sortie la valeur de** u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.
3. Étude de la suite (u_n) :

   (a) La suite (u_n) semble être croissante.
   Démonstration :
   $$u_{n+1}-u_n=u_n+2n+2-u_n=\boxed{2n+2>0} \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n=an^2+bn+c$.

   $$\begin{cases} u_0=a\times0^2+b\times0+c=0\\ u_1=a\times1^2+b\times1+c=2\\ u_2=a\times2^2+b\times2+c=6\end{cases}\iff\begin{cases}a+b=2\\4a+2b=6\\c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b=2\\2a+b=3\\c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n=u_{n+1}-u_n=2n+2$.

   (a) C'est une suite **arithmétique** de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=2$.

   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}v_k=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=v_0+v_1+\cdots+v_n=(n+1)v_0+\frac{n(n+1)}{2}\times r=2(n+1)+n(n+1)=\boxed{(n+1)(n+2)}$$

   Autre façon : $S_n=(n+1)\left(\frac{v_0+v_n}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{2+2n+2}{2}\right)=(n+1)\frac{2(n+2)}{2}=\boxed{(n+1)(n+2)}$

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n=u_{n+1}-u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

   $$S_n=(\cancel{u_1}-u_0)+(\cancel{u_2}-\cancel{u_1})+\cdots+(\cancel{u_n}-\cancel{u_{n-1}})+(u_{n+1}-\cancel{u_n})=u_{n+1}-u_0$$

   $$S_{n-1}=u_n-u_0\iff u_n=S_{n-1}+u_0=n(n+1)+0=n(n+1)$$

   Par conséquent : $\boxed{u_n=n(n+1)}$