TS : TD sur les suites (2)

I Exercice de type bac

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   (a) Calculer u_1 et u_2 (donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, puis sous forme décimales arrondies à 10^{-2} près).
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.
   (d) En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - \sqrt{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.
   (e) En déduire la limite de la suite (u_n).

II Polynésie juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	
Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n
	u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

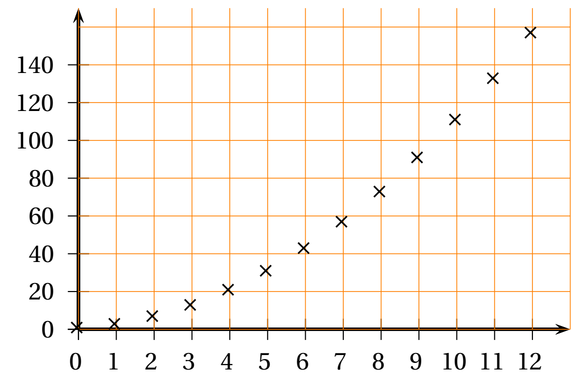
Algorithme 2	
Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	2	6	12	20	30	42	56

n	8	9	10	11	12
u_n	72	90	110	132	156



   (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (b) On définit, pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$S_n = (n+1)(n+2).$$

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$S_n = u_{n+1} - u_0,$$

   puis exprimer u_n en fonction de n.