

Devoir surveillé en TS1-TS2 et TS3 (31 mars 2018)

I

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme trigonométrique de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme trigonométrique de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

II

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x .
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.
3. Quelle est l'espérance de X ?
Que peut-on en déduire?

III

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

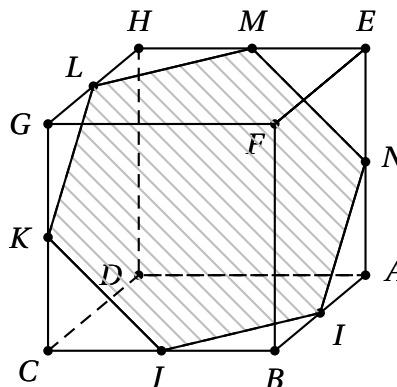
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $A(0; 1; 0)$,

$H(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets $I, J, K, L, M,$ et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.

- (a) Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (BGE) .
(b) En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
- Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
- (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .
(b) En déduire que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
- Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

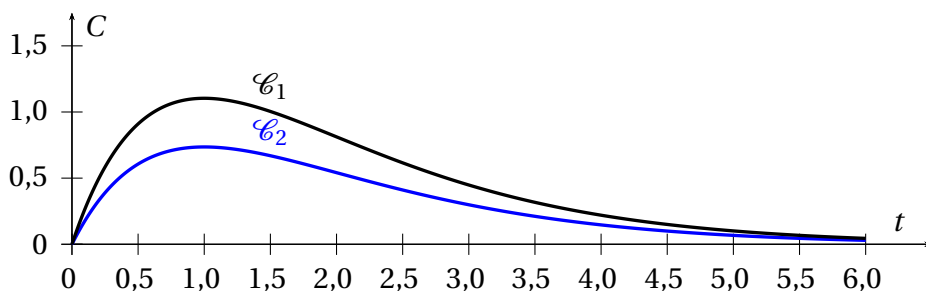
IV

Partie A

Voici deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



- La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale?
On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
- Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
- Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Déterminer $f'(0)$.
- L'affirmation suivante est-elle vraie?

« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale? Quelle est alors sa valeur? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2 \text{ g.L}^{-1}$ pour un jeune conducteur.
 - (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
 $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
 - (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5 \times 10^{-3} \text{ g.L}^{-1}$.
 - (a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
 - (b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par
 $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5 p prend la valeur 0,25 C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire : t prend la valeur $t + p$ C prend la valeur $f(t)$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme?