Exercices de bac sur les suites

I Nouvelle-Calédonie novembre 2016

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n)en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

II Antilles-Guyane juin 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1)
	n prend la valeur ... (2)
	u prend la valeur ... (3)
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n