TS : révisions décembre 2017

I

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

.

II D'après Amérique du sud novembre 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\, \vec{i}\,;\, \vec{j}\,;\, \vec{k}\right)$, on considère les points :

A de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,-5)$, B de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-5)$, C de coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,-5)$ et D de coordonnées $(2\,;3\,;4)$.

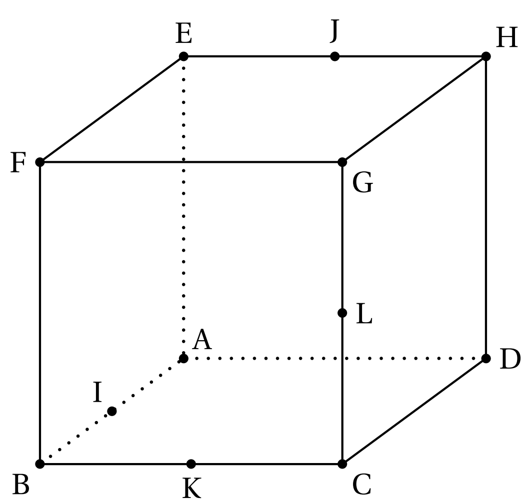
Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x+y=4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x-9y-5z+11=0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2k \\ y &=& \dfrac{7}{2}+k, \\ z &=& -\dfrac{1}{2}-9k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$$

III Liban mai 2015

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\, \overrightarrow{\mathrm{AB}},\, \overrightarrow{\mathrm{AD}},\, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. (a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

IV Nouvelle-Calédonie mars 2015

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\, \vec{i}\,;\, \vec{j}\,;\, \vec{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0\,;\,2\,;\,-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.

On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+k \\ y &=& -2k \\ z &=& 2 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. (a) Donner une représentation paramétrique de D_1.

   (b) Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).

(c) Le point $A_2(-1~;~4~;~2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.

   Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

   Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

   (a) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}17\\-22\\9\end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

   (b) Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

   Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

V Nouvelle-Calédonie novembre 2014

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O~;~\overrightarrow{i}~;~\overrightarrow{j}~;~\overrightarrow{k}\right)$.

On donne les points A$(1~;~0~;~-1)$, B$(1~;~2~;~3)$, C$(-5~;~5~;~0)$ et D$(11~;~1~;~-2)$.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

   (b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.

   (c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3;~1;~4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

   En déduire une équation cartésienne de ce plan.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).

   (b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).

   (c) Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?