

Exercices du bac sur l'intégration

I Antilles-Guyane septembre 2017

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1 ; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

II Amérique du Nord mai 2014

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de la fonction f et \mathcal{D} la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{D}

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont-elles un point commun? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C}_f , N le point d'abscisse x de la droite \mathcal{D} et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction \mathcal{A} définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction \mathcal{A} est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathcal{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?

III Asie juin 2014

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n) dx$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\frac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

- (a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

- (b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .