TS-TD sur le théorème des valeurs intermédiaires

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. (a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (c) Étudier les variations de g. Dresser son tableau de variation.

2. (a) Vérifier qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$.

   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

   (c) Étudier le signe de la fonction g.

Partie B : Etude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. (a) Montrer que pour tout x de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. (a) Vérifier que pour tout x de $\mathscr{D}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}.$$

   (b) On appelle Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
   Étudier la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de $[f(x) - (x + 2)]$.

   (c) Quelle conséquence graphique peut-on en tirer quant à la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$?

   (d) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ.

4. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$