

# LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Densité et loi de probabilité</b>	1
I.1	Densité de probabilité	1
I.2	Probabilité d'un événement	3
I.3	Fonction de répartition	3
I.4	Espérance	4
<b>II</b>	<b>Loi uniforme</b>	5
II.1	Définition	5
II.2	Espérance	5
<b>III</b>	<b>Loi exponentielle</b>	5
III.1	Loi de durée de vie sans vieillissement	6
III.2	Espérance d'une loi exponentielle	7
<b>IV</b>	<b>Loi normale</b>	7
IV.1	Loi normale centrée réduite	7
IV.2	Loi normale	10

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux variables aléatoires  $X$  qui prennent leurs valeurs dans un intervalle.

## I Densité et loi de probabilité

### I.1 Densité de probabilité

#### Définition

Soit  $I$  un intervalle. On appelle densité de probabilité sur  $I$  toute fonction  $f$  **continue**, sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs, et **positive** sur  $I$  telle que :

$$\int_I f(x) dx = 1$$

#### Remarques :

- Si  $I = [a, b]$ , alors la quantité notée  $\int_I f(x) dx$  désigne simplement  $\int_a^b f(x) dx$ .
- Si  $I$  est un intervalle non borné, par exemple  $[a; +\infty[$ , alors la quantité notée  $\int_I f(x) dx$  désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Si  $I$  est du type  $]-\infty; a[$  :

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

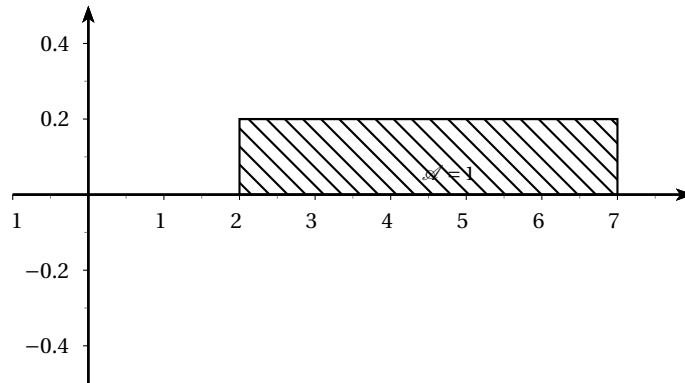
Enfin, si  $I = \mathbb{R}$ , alors la quantité notée  $\int_I f(x) dx$  désigne, lorsqu'elles existent, la somme des deux limites suivantes :

$$\int_I f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx.$$

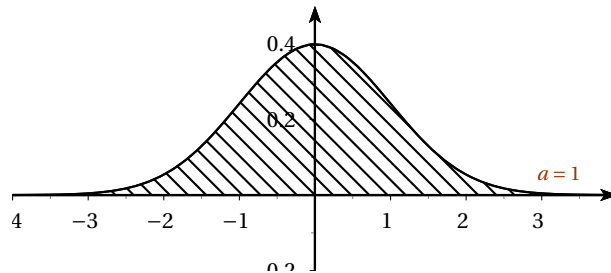
- $\int_I f(x) dx$  représente l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses pour  $x$  appartenant à  $I$

**Exemples :**

a)  $f : x \mapsto \frac{1}{5}$  sur  $[2; 7]$



b) Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  sur  $\mathbb{R}$ .



**Exemples :**

1. Déterminer un réel  $a$  de façon que la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = x + a$  soit une densité de probabilité sur  $[0, 1]$ .

On cherche  $a$  tel que :  $\int_0^1 (x + a) dx = 1$

$$\int_0^1 (x + a) dx = 1 \Leftrightarrow \left[ \frac{x^2}{2} + ax \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

2. Soit  $f$  une fonction constante sur un intervalle  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ). Quelle doit être la valeur de la constante  $\gamma$  pour qu'elle soit une densité?

On trouve :  $\gamma(b - a) = 1$ , donc  $\gamma = \frac{1}{b - a}$ .

3. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est bien continue (sauf en 0) et positive.

$$\text{Calculons : } \int_0^a f(t) dt = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[ -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda a}) = 1.$$

On en déduit que  $f$  est bien une densité sur  $\mathbb{R}$ .

## I.2 Probabilité d'un événement



### Définition

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience aléatoire et  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ , continue, de densité  $f$ .

La probabilité de l'événement  $\{X \in J\}$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  est définie comme l'aire du domaine défini par  $x \in J$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ .

En effet, cette définition est légitime car on a :  $P(I) = 1$  et on peut montrer que l'on retrouve toutes les propriétés requises pour définir une probabilité.

#### Remarques :

- Puisque  $[a, b]$  est inclus dans  $I$  et que  $f$  est positive sur  $I$ , on bien  $P([a, b]) \in [0, 1]$ .

- La probabilité d'un singleton  $\{x_0\}$  (ou intervalle réduit à un point) est nulle. En effet :

$$P(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0.$$

On dit alors que  $x_0$  est un événement "quasi-impossible".

- La définition s'étend à des intervalles non bornés lorsque la limite de l'intégrale existe.

#### Cas particuliers :

- Si  $f$  est constante sur  $[a, b]$  (égale à  $\frac{1}{b-a}$  d'après un calcul précédent), on dit que  $P$  est la **loi uniforme**.

- Si  $f$  est de la forme  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec  $\lambda > 0$ , on dit que  $P$  est la **loi exponentielle** de paramètre  $\lambda$ .

## I.3 Fonction de répartition



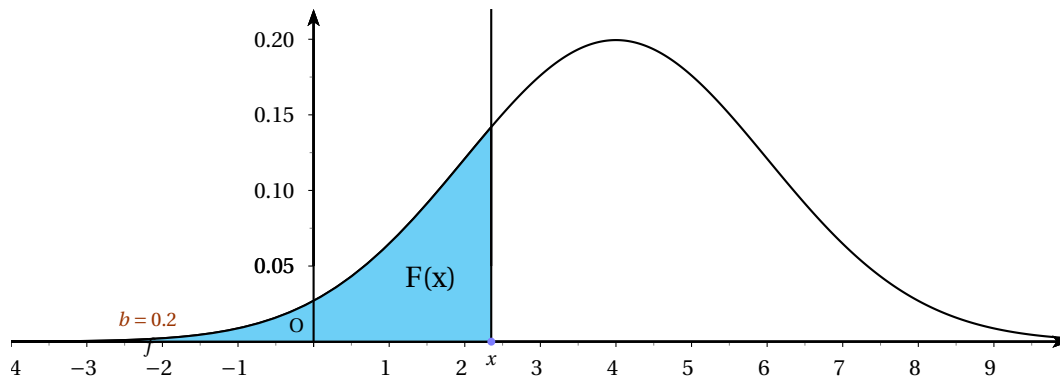
### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité  $f$  dont la courbe représentative est  $\mathcal{C}_f$ .

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire  $X$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in ]-\infty ; x]).$$

## Illustration graphique :



$F(x)$  correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de la densité, l'axe des abscisses et pour une abscisses inférieure à  $x$ .

### Remarques :

- Comme  $P(X = x) = 0$ ,  $P(X \leq x) = P(X < x)$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
- $F$  est continue et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

La continuité vient de la définition sous forme d'intégrale et la croissance vient de la définition comme une aire.

- $F$  est une primitive de  $f$  où  $f$  est la fonction densité.
- **Interprétation d'une probabilité à l'aide de  $F$  :**



### Propriété

$$P(X \leq b) = P(X < b) = F(b).$$

$$P(X \geq b) = P(X > b) = 1 - F(b)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

## I.4 Espérance



### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire associée à une fonction densité  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

L'espérance de  $X$  est  $E(X) = \int_I x f(x) dx$ .

La variance est  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_I x^2 f(x) dx - [E(X)]^2$

L'écart-type est  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## II Loi uniforme

### II.1 Définition

#### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ .

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $[a; b]$  signifie que la fonction de densité est constante sur  $[a; b]$  et nulle ailleurs.

$$\text{Par conséquent : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On écrit parfois que  $X$  suit la loi  $\mathcal{U}([a; b])$  ou  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ .

#### Propriété

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a \leq b$ . Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ .

La fonction de répartition  $F$  associée à  $X$  est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

### II.2 Espérance

#### Définition

L'espérance d'une variable aléatoire associée à une fonction de densité  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est

$$\int_I x f(x) dx$$

**Propriété :** l'espérance d'une variable aléatoire d'une loi uniforme sur  $[a; b]$  est :  $E(x) = \frac{a+b}{2}$ .

**Démonstration :**

$$E(x) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[ \frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

**Exemple :** Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n° 14.

Soit  $X$  le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0; 6]$ .

Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes?  $P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$ .

## III Loi exponentielle

#### Définition

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  lorsque la fonction de densité associée

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### Propriété

Soit  $\lambda > 0$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

La fonction de répartition associée est définie par  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**Exemple :** On suppose que la durée de vie  $X$  d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} 0,1 e^{-0,1t} dt = \frac{1}{e}.$$

2. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie?

$$P_{X>10}(X > 12) = \frac{P(X > 12)}{P(X > 10)} = \frac{e^{-0,1 \times 12}}{e^{-0,1 \times 10}} = e^{-0,2} \approx 0,82.$$

3. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 0,1 e^{-0,1t} dt = e^{-0,2} \approx 0,82. \text{ On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son } ,ge.$$

**On dit que  $X$  est une loi de durée de vie sans vieillissement.**

Une étude plus systématique de ce phénomène sera faite au paragraphe suivant.

## III.1 Loi de durée de vie sans vieillissement

### Définition

Soit  $T$  la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet.

On dit que  $T$  suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant  $t + h$  sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant  $t$  ne dépend pas de son ,ge  $t$  :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$$

**Remarque :** la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque  $h$  est petit. Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. **Mais cette loi s'applique par exemple plus à des composants électroniques.**

### Théorème

| Une loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

### Démonstration :

Supposons que  $T$  suive une loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{P((T \geq t+h) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

Or, l'événement  $(T \geq t+h)$  est inclus dans l'événement  $(T \geq t)$  donc :  $P((T \geq t+h) \cap (T \geq t)) = P(T \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$ .

Par ailleurs :  $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$

D'où :  $P_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$ .

### Remarque :

La réciproque est vraie : une loi de durée de vie sans vieillissement est une loi exponentielle.

La démonstration n'est **plus au programme**.

## III.2 Espérance d'une loi exponentielle

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .



### Propriété

L'espérance d'une loi exponentielle est  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

### Démonstration

Calculons tout d'abord l'intégrale suivante :

$$\int_0^x t \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Pour cela, posons  $g(t) = te^{-\lambda t}$ .

On a :  $g'(t) = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$ .

On en déduit que  $\lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - g'(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int_0^x t \lambda e^{-\lambda t} dt &= \int_0^x [e^{-\lambda t} - g'(t)] dt = \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x g'(t) dt = -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} - 1) - (g(x) - g(0)) \\ &= -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} - 1) - xe^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre  $x$  vers  $+\infty$ .

$$xe^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \times \lambda xe^{-\lambda x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{-\lambda x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \times \lambda xe^{-\lambda x} \right] = \frac{1}{\lambda} \times \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0 \text{ (croissances comparées)}$$

On en déduit que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

## IV Loi normale

### IV.1 Loi normale centrée réduite

## Définition

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale centrée réduite si et seulement si sa densité  $f$  est définie par la fonction  $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

La loi normale centrée réduite se note  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

0 est l'espérance  $\mu$  et 1 est le carré de l'écart-type  $\sigma$  donc  $\sigma^2 = 1$ , d'où  $\sigma = 1$

## Théorème de « De Moivre-Laplace » (admis)

Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $p$  un nombre réel fixé de  $]0; 1[$ .

Soit  $X_n$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$ .

Pour chaque valeur de  $n$ , l'espérance est  $E(X_n) = np$  et l'écart-type  $\sigma(X_n) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$ .

Pour chaque  $n$ , on pose  $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ .

Pour tous nombres  $a$  et  $b$  avec  $a < b$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ce théorème montre que l'on peut approximer une loi binomiale par la loi normale.

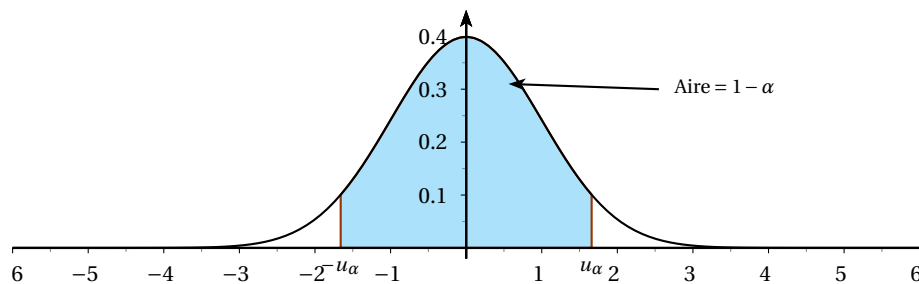
## Propriété

Pour tout réel  $\alpha$  de  $]0; 1[$ , il existe un réel  $u_\alpha$  tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

où  $X$  désigne une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

### Illustration graphique :



### Démonstration :

Soit  $\alpha \in ]0; 1[$ .

$X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc on peut définir la fonction  $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Cette fonction est la primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en 0; elle est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{2}$  car  $f$  est paire et  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ .

$$0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $u_n$  tel que  $F(u_n) = \frac{1-\alpha}{2}$ .

Par parité de  $f$  et linéarité de l'intégrale, on en déduit le résultat.

**Remarque** Les primitives de la fonction de Gauss  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  ne peuvent pas s'exprimer pas à l'aide de fonctions usuelles.

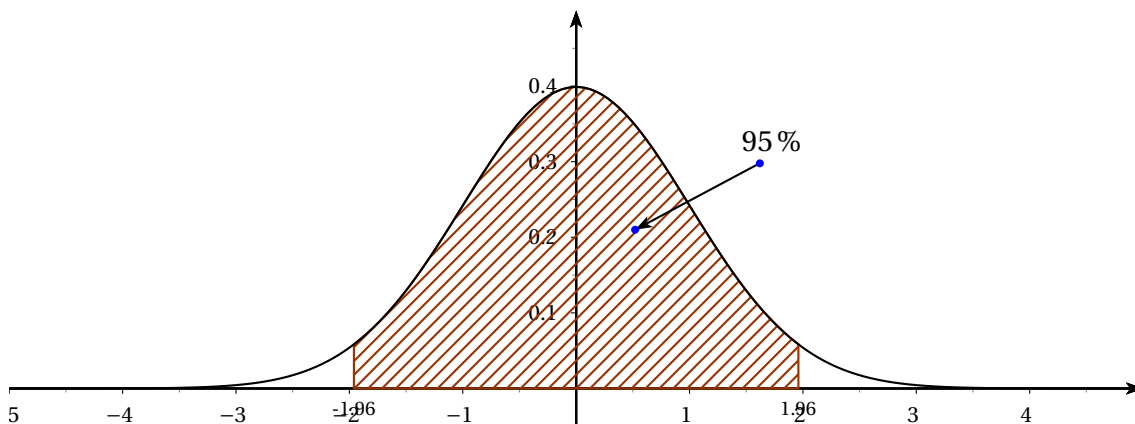
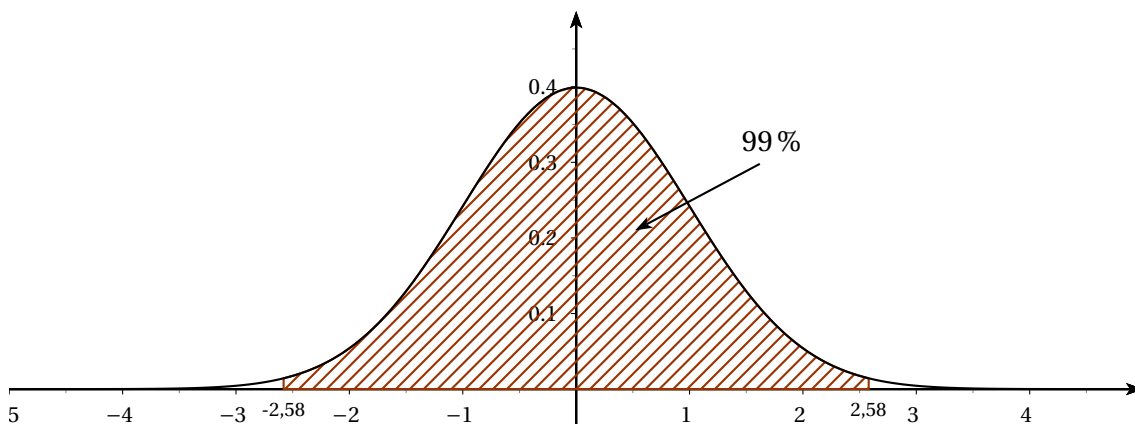
On ne peut donc pas calculer de valeur exacte de l'intégrale donc pas de valeur exacte de  $u_\alpha$ .

Les mathématiciens ont établi des tables de valeurs ou on peut utiliser la calculatrice pour obtenir une valeur approchée.

**Cas particuliers :(à connaître)**

- Pour  $\alpha = 0,05$ ,  $u_{0,05} \approx 1,96$
- Pour  $\alpha = 0,01$ ,  $u_{0,01} \approx 2,58$

Interprétation graphique :



## Propriété

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$ .  
Son espérance est  $E(X) = 0$ .

### Démonstration :

$$\text{Pour tout } x > 0, \int_0^x t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

$$\text{Par passage à la limite, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\text{De même, } \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par somme, on a  $E(X) = 0$ .

**Remarque :** on admet que  $V(X) = 1$  et donc que  $\sigma(X) = 1$ .

## IV.2 Loi normale

### Définition

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  signifie que la variable aléatoire  $\frac{X - \mu}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

On note  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$  ou  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

**Remarque :** la densité associée à une loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

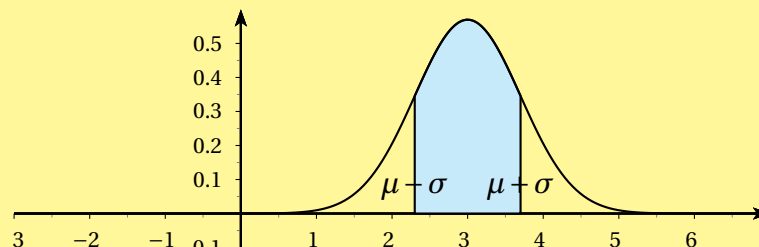
### Remarques :

- Pour tout  $x$ ,  $f(\mu - x) = f(\mu + x)$ , donc la courbe admet la droite d'équation  $x = \mu$  comme axe de symétrie et le maximum est atteint pour  $x = \mu$ .
- Le maximum est  $f(\mu)$  est vaut  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ , donc devient de plus en plus grand quand  $\sigma$  devient de plus en plus petit.

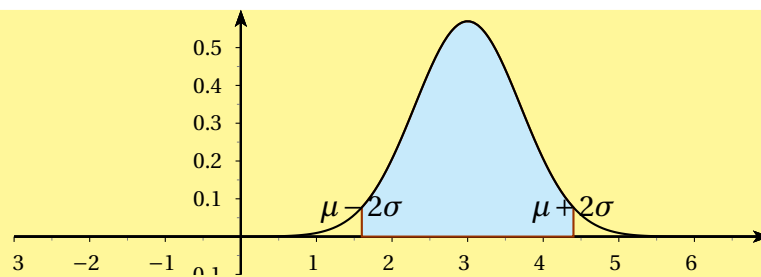
## Propriété

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ .

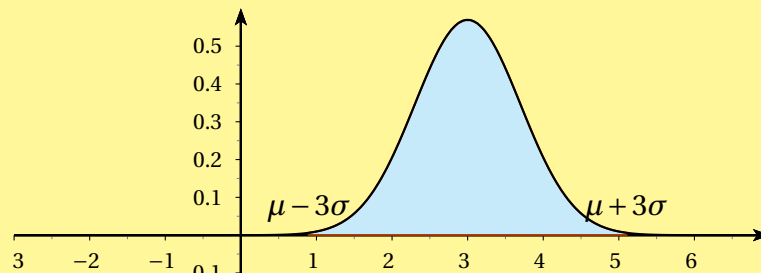
- La probabilité de l'événement  $X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$  est approximativement égale à 0,68



- La probabilité de l'événement  $X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$  est approximativement égale à 0,95.



- La probabilité de l'événement  $X \in [\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$  est approximativement égale à 0,99.



**Remarque :** 99 % de l'aire est comprise entre les droites d'équations  $x = \mu - 3\sigma$  et  $x = \mu + 3\sigma$  !

**Démonstration :**

$$X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1.$$

Comme  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ ,  $\frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0 ; 1)$ .

$$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) = P\left(-1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1\right) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0,68.$$

On ne sait pas calculer une valeur exacte de ce nombre, mais on peut calculer une valeur approchée à la calculatrice.