TS : correction du TD sur la fonction exponentielle (2)

I

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = \boxed{1}$

$B = \mathrm{e}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^x = \boxed{\mathrm{e}^{x+1}}$

$C = (\mathrm{e}^{-x})^2 = \boxed{\mathrm{e}^{-2x}}$

$D = D = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}} = \mathrm{e}^{2x-(2-x)} = \mathrm{e}^{3x-2}$

$E = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{3x-2x} = \boxed{\mathrm{e}^x}$

II

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-x} = -1$
   Pas de solution, puisque l'exponentielle d'un nombre est un nombre strictement positif : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.
2. $e^{3x+1} = \sqrt{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3x+1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{6}\right\}}$

III

Résoudre les inéquations suivantes :

$e^{x^2-2} \leqslant \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2-2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x^2 - 2 \leqslant -x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \leqslant 0.$

$\boxed{\mathscr{S} =]-2\,;\,1[}$

IV

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x - 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Limite en $-\infty$: on a une forme indéterminée.
     $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[2 + 2x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x\right]$.
     $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$
   - Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - [2x-4] = 2\mathrm{e}^{-x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-4)] = 0$.
   Δ est donc asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   $f(x) - [2x-4] = 2\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

3. $f'(x) = 2\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + 2 = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

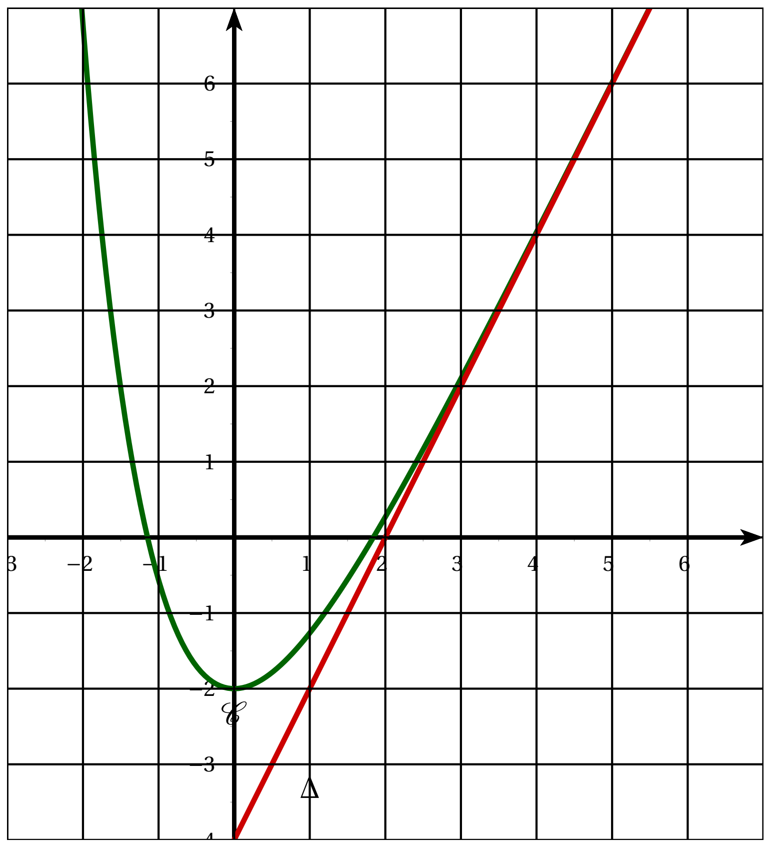
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow 0 < x$

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Courbe :



V

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + x - 1.$$

1. Calcul de $f'(x)$:

   $f = uv + w$ avec $u(x) = x$, $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $w(x) = x - 1$.

   $f' = u'v + uv' + w'$ avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}$ et $w'(x) = 1$

   $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x\times\left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) + 1 = \boxed{(1-2x)\mathrm{e}^{-2x} + 1}$

2. (a) $f'(x) > 1 \Leftrightarrow (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < \dfrac{1}{2}}$ (car $\mathrm{e}^{-2x} > 0$)

(b) Pour étudier le sens de variation de f', on étudie le signe de f''.

$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 2(1-2x)\mathrm{e}^{-2x} = (-2-2(1-2x))\mathrm{e}^{-2x} = (4x-4)\mathrm{e}^{-2x} = 4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$.

$f''(x) = 0$ pour $x = 1$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 1$.

f' est donc décroissante pour sur$]-\infty\ ;\ 1]$ puis croissante sur $[1\ ;\ =\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

.

(c) $f'(1) = 1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0;8 > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout x.

3. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(0) = -1 < 0$
- $f(2) = 1 + 2\mathrm{e}^{-4} \approx 1,04 > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$; celle-ci est unique puisque f est croissante sur cet intervalle.

Notons α cette solution.

On trouve $\boxed{\alpha \approx 0,84}$