Correction du D1

I

1. $\dfrac{20-0}{100-0}=0{,}2$
2. $\dfrac{0+100}{2}=50$

II

1. $1-\mathrm{e}^{-0{,}001\times 1\,500}=1-\mathrm{e}^{-1{,}5}$
2. $\mathrm{e}^{-0{,}001\times 400}-\mathrm{e}^{-0{,}001\times 2\,000}=\mathrm{e}^{-0{,}4}-\mathrm{e}^{-2}$
3. $\mathrm{e}^{-0{,}001\times 1\,000}=\mathrm{e}^{-1}$
4. $P_{Y>1\,000}(Y>2\,000)$
   $=P_{Y>1\,000}(Y>1\,000+1\,000)$
   $=P(Y>1\,000)=\mathrm{e}^{-1}$

III

1. $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=3$ donc $\lambda=\dfrac{1}{3}$
2. $P(X<3)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 3}=1-\mathrm{e}^{-1}$

IV Pondichéry avril 2014

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

   D'après le cours : $P(X\in[a\,;b])=\displaystyle\int_a^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{t}=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_a^b=\mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$ où $a>0$ et $b>0$.

   Donc pour $t>0$, $P(X\leqslant t)=\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-\lambda t}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   $P(X\leqslant 2)=0,15 \iff 1-\mathrm{e}^{-\lambda\times 2}=0,15 \iff 0,85=\mathrm{e}^{-2\lambda} \iff \ln(0,85)=-2\lambda \iff \dfrac{\ln(0,85)}{-2}=\lambda$

   $$\iff \lambda=-\dfrac{\ln(0,85)}{2}$$

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. (a) Pour $t>0$: $P(X\geqslant t)=1-P(X<t)=1-P(X\leqslant t)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   Donc $P(X\geqslant 3)=\mathrm{e}^{-3\times 0{,}081}\approx 0,78$

   (b) Pour tous réels positifs t et h : $P(X\geqslant t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P(X\geqslant t+h)=\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}$

   $P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\dfrac{P\left[(X\geqslant t)\cap(X\geqslant t+h)\right]}{P(X\geqslant t)}=\dfrac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\times\mathrm{e}^{-\lambda h}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda h}=P(X\geqslant h)$

   (c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans.

   La probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est $P_{X\geqslant 3}(X\geqslant 3+2)$.

   D'après le cours : $P_{X\geqslant 3}(X\geqslant 3+2)=P(X\geqslant 2)=1-P(X<2)=1-0,15=0,85$.

   (d) D'après le cours, pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance de X est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

   Donc $E(X)=\dfrac{1}{0,081}\approx 12,35$.

   Ce qui veut dire que la durée moyenne de vie d'un moteur est de $12,35$ années.

3. L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard.

   Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

   $$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1,96\frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   sous les trois conditions : $n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$.

   L'échantillon de l'enquête est de taille $n=800$ et l'entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux est égal à 1 % donc $p=0,01$.

   Regardons si les trois conditions sont vérifiées :
   $n=800\geqslant 30$, $np=800\times 0,01=8\geqslant 5$ et $n(1-p)=800\times 0,99=792\geqslant 5$.

   L'intervalle est :
   $I=\left[0,01-1,96\dfrac{\sqrt{0,01\,(1-0,01)}}{\sqrt{800}}\,;0,01+1,96\dfrac{\sqrt{0,01\,(1-0,01)}}{\sqrt{800}}\right]$ $[0,003\,;0,017]$.

   On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux sur 800, ce qui fait une proportion de $\dfrac{15}{800}=0,018\,75$; or $0,018\,75\notin I$ donc le résultat de ce test remet en question l'annonce de l'entreprise A.