TS : corrigé du TD (probabilités conditionnelles)

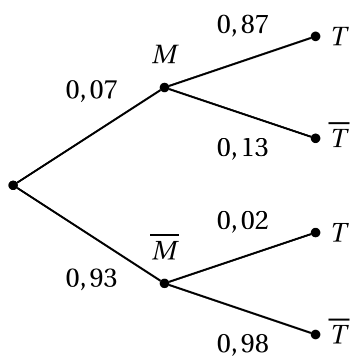
I

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays. On estime 7 % des bovins atteints.
On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie.
On a constaté que :

- lorsque un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas
- lorsque un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

Pour un animal désigné au hasard, on note M « l'événement l'animal est malade » et T l'événement « le test est positif ».

On peut visualiser la situation par un arbre :



1. Calculer les probabilités des événements :

   (a) $p(M \cap T) = p_M(T) \times p(T) = 0,87 \times 0,07$
   $= \boxed{0,0609}$

   (b) $M \cap \overline{T} = p_M\left(\overline{T}\right) \times p\left(\overline{T}\right) = 0,13 \times 0,07 = \boxed{0,0091}$

   (c) $\overline{M} \cap T = p_{\overline{M}}(T) \times p(T) = 0,02 \times 0,93 = \boxed{0,9114}$

   (d) $\overline{M} \cap \overline{T} = p_{\overline{M}}(\overline{T}) \times p(T) = 0,98 \times 0,93 = \boxed{0,9114}$

2. $T = (M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap M\right)$ (réunion d'événements incompatibles)

   $p(T) = p_M(T) \times p(T) + p_{\overline{M}}(T) \times p\left(\overline{M}\right)$ (formule des propriétés totales)

   $= 0,87 \times 0,07 + 0,02 \times 0,93 = \boxed{0,0795}$

3. $p_{\overline{T}}(M) = \dfrac{p(M \cap \overline{T})}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,13 \times 0,07}{1 - 0,0795} = \dfrac{0,0091}{0,9205} \approx \boxed{0,0099 \approx 1\,\%}$

II Inverser un arbre de probabilités

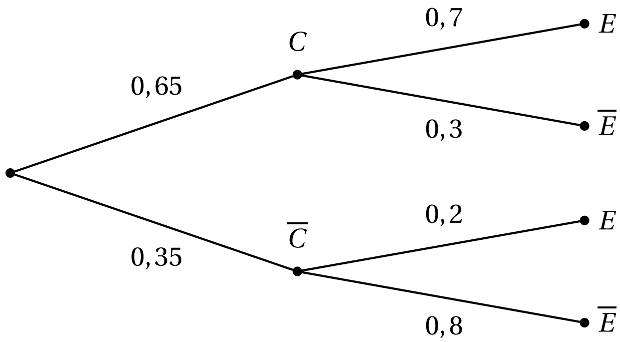
Un sondage effectué récemment dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultas suivants :

- 65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- parmi les personnes qui sont contre ce barrage, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes qui sont pour la construction de ce barrage, 20 % sont ds écologistes.

On note C l'événement « La personne interrogée au hasard est contre ce barrage ».

On note E l'événement : « La personne interrogée est écologiste ».

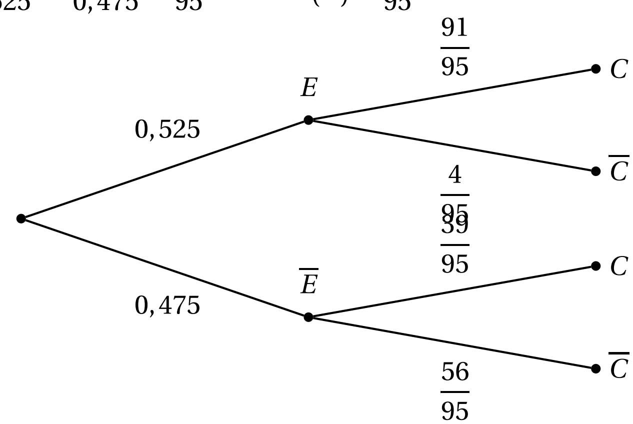
1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. $p(E) = p_C(E) \times p(C) + p_{\overline{C}}(R) \times p\left(\overline{C}\right) = 0,7 \times 0,65 + 0,2 \times 0,35 = 0,455 + 0,07 = \boxed{0,525}$
3. On inverse l'arbre de probabilités; compléter l'arbre ci-dessous :

   On a :

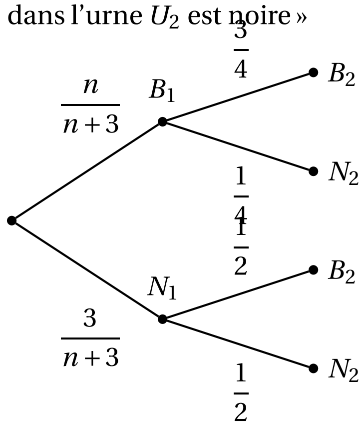
   - $p(E) = 0,525$ donc $p\left(\overline{E}\right) = 1 - 0,525 = \boxed{0,475}$.
   - $p_E(C) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(E)} = \dfrac{0,455}{0,475} = \dfrac{91}{95}$
   - $p_E\left(\overline{C}\right) = 1 - \dfrac{91}{95} = \dfrac{4}{95}$
   - $p_{\overline{E}}(C) = \dfrac{p\left(C \cap \overline{E}\right)}{p\left(\overline{E}\right)} = \dfrac{0,3 \times 0,65}{1 - 0,525} = \dfrac{0,195}{0,475} = \dfrac{39}{95}$ d'où $p_{\overline{E}}\left(\overline{C}\right) = \dfrac{56}{95}$



III Le jeu est-il favorable ?

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n entier, $n \geqslant 1$).
L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces deux opérations constitue une épreuve.
Représentation par un arbre :

- On note B_1 l'événement « la boule choisie dans l'urne U_1 est blanche »
- On note N_1 l'événement « la boule choisie dans l'urne U_1 est noire »
- On note B_2 l'événement « la boule choisie dans l'urne U_2 est blanche »
- On note N_2 l'événement « la boule choisie dans l'urne U_2 est noire »



1. On considère l'événement A : « Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
   (a) Pour retrouver la configuration initiale, il faut avoir tirer successivement deux boules de même couleur.
   $A = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$ donc $p(A) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{n}{n+3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{n+3} = \dfrac{3n+6}{4(n+3)} = \boxed{\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)}$.
   (b) On a une forme indéterminée.
   $\dfrac{n+2}{n+3} = \dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}$ qui te,d vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p(A) = \dfrac{3}{4}}$
2. On considère l'événement B : « Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
   B est réalisé si, et seulement si, on a tiré une boule noire dans l'urne U_1 puis une boule blanche dans l'urne B_2.
   $p(B) = \dfrac{3}{n+3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2(n+3)} = \boxed{\dfrac{6}{4(n+3)}}$
3. Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve. L'issue de cette épreuve, on compte le nombre de boules blanches contenues dans l'urne U_2.
   - Si U_2 contient 1 boule blanche, le joueur reçoit $2n$ €.
   - Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €.
   - Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   (a) On note X le gain algébrique du joueur. Les valeurs prises par G sont $2n-20$, $n-20$ ou -20. Si $n \leqslant 10$, $2n-20 \leqslant 0$ donc le gain maximum est négatif, donc le joueur est sûr de perdre de l'argent à chaque partie, donc le joueur n'a aucun intérêt à joueur si $n \leqslant 10$!
   Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le gain algébrique du joueur.
   Par exemple, si après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n-20$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   On constate que $p(X = 2n-20) = p(A) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$ et $p(X = n-20) = p(B) = \dfrac{6}{4(n+3)}$.
   On en déduit $p(X=-20) = 1-\left[\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right) + \dfrac{6}{4(n+3)}\right] = \dfrac{4(n+3)-3(n+2)-6}{4(n+3)} = \dfrac{4n+12-3n-6-6}{4(n+3)} = \boxed{\dfrac{n}{4(n+3)}}$
   On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau :

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$p(X = x_i)$	$\dfrac{6}{4(n+3)}$	$\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$	$\dfrac{n}{4(n+3)}$

   (c) $E(X) = \dfrac{6}{4(n+3)} \times (2n-20) + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)(n-20) + \dfrac{n}{4(n+3)} \times (-20) = \boxed{\dfrac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}}$.
   (d) $E(X)$ est du signe de $3n^2-62n-240$ qui a pour racines $\dfrac{10}{3}$ et 24.
   Il est positif si n est extérieur à l'intervalle formé par les racines; comme $n > 0$ on e déduit que $n > 24$ donc $\boxed{n \geqslant 25}$