Correction des exercices de bac

I Nouvelle-Calédonie novembre 2016

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$, donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

1. On calcule, à la calculatrice, u_n pour les premières valeurs de n (valeurs de u_n arrondies) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
u_n	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite (u_n) **semble croissante** et **semble converger vers le nombre 5**.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$. Donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
   - **Hérédité**
     Soit n un entier naturel quelconque.
     On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n + 1$.
     $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$; donc :
     $u_{n+1} = 0,8\left(5 - 4 \times 0,8^n\right) + 1 = 0,8 \times 5 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$
     Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
     On a démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire pour tout n.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie pour $n = 0$.
     Elle est héréditaire à partir du rang 0.
     Donc, d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = 5 - 4 \times 0,8^n}$.

3. - $u_{n+1} - u_n = \left(5 - 4 \times 0,8^{n+1}\right) - \left(5 - 4 \times 0,8^n\right) = 5 - 4 \times 0,8^{n+1} - 5 + 4 \times 0,8^n = 4 \times 0,8^n\,(1 - 0,8)$
     $= \boxed{4 \times 0,8^n \times 0,2 > 0}$
     Pour tout n, on a démontré que $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est **croissante**.
   - $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite géométrique $(0,8^n)$ de raison 0,8 **converge vers 0**.
     $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0,8^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 4 \times 0,8^n = \boxed{5}$
     Donc la suite (u_n) est convergente vers 5.

   On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$; donc, pour tout n, $u_n = v_n + 5c$.

1. - $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0,8u_n + c - 5c = 0,8(v_n + 5c) - 4c = 0,8v_n + 4c - 4c = \boxed{0,8v_n}$
   - $v_0 = u_0 - 5c = \boxed{1-5c}$

   La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$ donc, pour tout n,
$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{(1-5c)\,0,8^n}.$$
3. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n, $u_n = v_n + 5c$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite $\boxed{5c}$.
L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 ; il faut donc que $5c = 10$, autrement dit que $c = 2$.
Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.

II Antilles-Guyane juin 2014

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   (b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est **décroissante à partir du rang 1**.

2. (a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

   — **Initialisation.** On a $u_1 = 3,4$ et $\dfrac{15}{4} \times 0,5 = 1,875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   — **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :
$$u_k \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^k \qquad \text{(HR)}$$
   on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$.
   D'après (HR) :
$$\begin{array}{rcll} u_k & \geqslant & \dfrac{15}{4} \times 0,5^k & \text{donc, en multipliant par } \dfrac{1}{5} : \\ \dfrac{1}{5}u_k & \geqslant & \dfrac{3}{4} \times 0,5^k & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0,5^k : \\ \dfrac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k & \geqslant & \dfrac{3}{4} \times 0,5^k + 3 \times 0,5^k & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} & \geqslant & \dfrac{15}{4} \times 0,5^k & \end{array}$$
   Or, pour tout entier naturel k, $0,5^k \geqslant 0,5^{k+1}$, on en déduit donc que :
$$u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}$$
   et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.

   — **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul :
$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n \\ & = & 3 \times 0,5^n - \dfrac{4}{5}u_n \\ & = & \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{15}{4} \times 0,5^n - u_n\right) \end{array}$$
   D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

(c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1} \\ & = & \dfrac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5 \times 0,5^n \\ & = & \dfrac{1}{5} u_n - 2 \times 0,5^n \\ & = & \dfrac{1}{5} \left(u_n - 10 \times 0,5^n\right) \\ & = & \dfrac{1}{5} v_n. \end{array}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0,5^0 = 2 - 10 = -8$.

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit que $-8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0,5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

(c) $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que u>0,01	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\dfrac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	