Correction de la feuille de révisions

I

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

- **Initialisation** : Pour $k = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité** : on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + n \times (n+1)!$
$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!+) + (n+1)(n+1)! - 1$
$= [(n+1)! + (n+1)(n+1)!] - 1 = [(n+1)!(1 + (n+1))] - 1$
$= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$ c.q.f.d

D'après l'axiome de récurrence, la propriété st vraie pour tout $n \geqslant 1$.

II Liban mai 2015

1. (a) De $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$, $\mathrm{J}\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ et $\mathrm{K}\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$, on déduit :
   $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}(1 ; 0 ; -1)$.
   D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{FD}}(-1 ; 1 ; -1)$ et :
   $\overrightarrow{\mathrm{FD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{FD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JK}} = -1 + 1 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

   (b) D'après la question précédente : $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{IJK}) \iff -x + y - z + d = 0$.
   En particulier $\mathrm{I} \in (\mathrm{IJK}) \iff -\frac{1}{2} + d = 0 \iff d = \frac{1}{2}$.
   Donc $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{IJK}) \iff -x + y - z + \frac{1}{2} = 0 \iff x - y + z - \frac{1}{2} = 0$.

2. On a $M(x ; y ; z) \in (\mathrm{FD}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{F}M} = t\overrightarrow{\mathrm{FD}} \iff \left\{\begin{array}{rcr} x-1 & = & -t \\ y-0 & = & t \\ z-1 & = & -t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$.

3. $M(x ; y ; z)$ appartient à (FK) et à (IJK) si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et celle du plan soit :
   $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & 1-t \\ x-y+z-\frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 1 - t - t + 1 - t - \frac{1}{2} = 0 \iff -3t + \frac{3}{2} = 0 \iff t = \frac{1}{2}$.
   D'où les coordonnées de $M\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

4. $\mathrm{IJ}^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{6}{4}$; de même $\mathrm{IK}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{2}{4}$ et $\mathrm{JK}^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.
   Or $\frac{6}{4} + \frac{2}{4} = 2 \iff \mathrm{IJ}^2 + \mathrm{IK}^2 = \mathrm{JK}^2$ égalité qui montre d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle IJK est rectangle en I.
   L'aire du triangle (IJK) est donc égale à :
   $\mathscr{A}(\mathrm{IJK}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{IJ} \times \mathrm{IK} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\mathscr{V}(\mathrm{FIJK}) = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(\mathrm{IJK}) \times \mathrm{FM}$.
   $\mathrm{F}M^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathrm{F}M = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $\mathscr{V}(\mathrm{FIJK}) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$.

6. Vérifions si $L\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient au plan IJK :

   $1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$ est vraie, donc les quatre loints I, J, K et L sont coplanaires.

   Vérifions si (IJ) est parallèle à (KL) :

   $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites coplanaires (IJ) et (KL) sont sécantes.

III D'après Amérique du sud novembre 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$, B de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ -5)$, C de coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ -5)$ et D de coordonnées $(2;3;4)$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}$. Il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AD}$. Les points A, B et D ne sont pas alignés.
2. Les égalités $3+1=4$ et $0+4=4$ sont vraies; les points A et B appartiennent au plan. Donc la droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x+y=4$.
3. Les coordonnées des trois points vérifient l'équation. L'équation proposée est bien celle du plan (BCD), ces trois points étant manifestement disjoints deux à deux et non alignés.
4. Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation précédente. Donc A n'appartient pas au plan (BCD). Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
5. Notons $\mathscr{D}$ la droite dont la représentation paramétrique est $\begin{cases}x=1-2k\\y=\dfrac{7}{2}+k\\z=-\dfrac{1}{2}-9k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

   Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-9\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{u}=-\overrightarrow{BC}$ donc $\mathscr{D}$ et (BC) sont parallèles.

   Varifions si B appartient à $\mathscr{D}$: pour trouver $x_B=0$, on doit avoir $k=\dfrac{1}{2}$. Pour cette valeur de k, on trouve $y=4=y_B$ et $z=-5=z_B$.

   On en déduit que $B\in\mathscr{D}$. Les deux droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont confondues donc c'est bien la représentation paramétrique de (BC).

IV Nouvelle-Calédonie mars 2015

1. (a) Une représentation paramétrique de D_1 s'obtient en traduisant l'égalité $\overrightarrow{A_1M}=t\overrightarrow{u_1}$ avec $t\in\mathbb{R}$ soit :

   $$\begin{cases}x-0&=&t\\y-2&=&2t\\z-(-1)&=&3t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\iff\begin{cases}x&=&t\\y&=&2+2t\\z&=&-1+3t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$$

   (b) D_2 a pour représentation paramétrique :

   $$\begin{cases}x&=&1+k\\y&=&0-2k\\z&=&2+0k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}.$$

   On reconnait qu'un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

   (c) $A_2\in D_2\iff\begin{cases}-1&=&1+k\\4&=&0-2k\\2&=&2+0k\end{cases}\iff\begin{cases}-2&=&k\\-2&=&k\\2&=&2\end{cases}$ qui a une solution $k=-2$.

   Le point A_2 appartient à D_2.
2. Les vecteurs directeurs de D_1 et de D_2 ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

   Elles sont sécantes s'il existe des réels t et k tels que :

   $$\begin{cases}t&=&1+k\\2+2t&=&0-2k\\-1+3t&=&2+0k\end{cases}\iff\begin{cases}t&=&1+k\\2+2+2k&=&0-2k\\-1+3+3k&=&2+0k\end{cases}\iff\begin{cases}t&=&1+k\\4k&=&-4\\3k&=&0\end{cases}\iff\begin{cases}t&=&1+k\\k&=&-1\\k&=&0\end{cases}$$

   Ce système n'a pas de solution donc il n'existe pas de point commun aux deux droites, elles ne sont donc pas coplanaires.
3. Les droites D_1 et Δ_1 contiennent le point A_1. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux :

   $\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{v}=-6-6+12=0$.

   Conclusion : les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.
4. Les droites D_2 et Δ_2 sont aussi perpendiculaires

(a) $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1 s'il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires et non nuls de ce plan soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$; or

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = -6 - 6 + 12 = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 17 \times (-6) - 22 \times (-3) + 4 \times 9 = -102 + 66 + 36 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. Il est par conséquent normal à ce plan.

(b) Si P_1 et P_2 sont parallèles $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan P_1 est aussi un vecteur normal au plan P_2 ; il est donc orthogonal à tout vecteur non nul du plan P_2 comme u_2 et $\overrightarrow{v}$.

On a bien $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, mais $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 17 + 44 + 0 = 61 \neq 0$.

Donc $\overrightarrow{n}$ n'est pas normal au plan P_2 et les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2 lesquelles sont respectivement perpendiculaire à D_1 et D_2.
Par conséquent la droite Δ est orthogonale aux droites D_1 et D_2.
Or cette droite appartient au plan P_1 et au plan P_2. Elle est donc perpendiculaire aux droites D_1 et D_2.
Il existe donc une droite de l'espace perpendiculaire à la droite D_1 et à D_2 : c'est la droite Δ.

V Nouvelle-Calédonie novembre 2014

1. (a) Une représentation paramétrique de D_1 s'obtient en traduisant l'égalité $\overrightarrow{A_1M} = t\overrightarrow{u_1}$ avec $t \in \mathbb{R}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-0 & = & t \\ y-2 & = & 2t \\ z-(-1) & = & 3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) D_2 a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+k \\ y & = & 0-2k \\ z & = & 2+0k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}.$$

On reconnait qu'un vecteur directeur de D_2 est $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A_2 \in D_2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & 1+k \\ 4 & = & 0-2k \\ 2 & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2 & = & k \\ -2 & = & k \\ 2 & = & 2 \end{array}\right.$ qui a une solution $k = -2$.

Le point A_2 appartient à D_2.

2. Les vecteurs directeurs de D_1 et de D_2 ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.
Elles sont sécantes s'il existe des réels t et k tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 2+2t & = & 0-2k \\ -1+3t & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 2+2+2k & = & 0-2k \\ -1+3+3k & = & 2+0k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ 4k & = & -4 \\ 3k & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1+k \\ k & = & -1 \\ k & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution donc il n'existe pas de point commun aux deux droites, elles ne sont donc pas coplanaires.

3. Les droites D_1 et Δ_1 contiennent le point A_1. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires il suffit de montrer que deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux :
$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} = -6 - 6 + 12 = 0$.
Conclusion : les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

4. Les droites D_2 et Δ_2 sont aussi perpendiculaires

(a) $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1 s'il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires et non nuls de ce plan soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$; or

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = -6 - 6 + 12 = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 17 \times (-6) - 22 \times (-3) + 4 \times 9 = -102 + 66 + 36 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. Il est par conséquent normal à ce plan.

(b) Si P_1 et P_2 sont parallèles $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan P_1 est aussi un vecteur normal au plan P_2 ; il est donc orthogonal à tout vecteur non nul du plan P_2 comme u_2 et $\overrightarrow{v}$.

On a bien $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, mais $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 17 + 44 + 0 = 61 \neq 0$.

Donc $\overrightarrow{n}$ n'est pas normal au plan P_2 et les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5. Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2 lesquelles sont respectivement perpendiculaire à D_1 et D_2.
Par conséquent la droite Δ est orthogonale aux droites D_1 et D_2.
Or cette droite appartient au plan P_1 et au plan P_2. Elle est donc perpendiculaire aux droites D_1 et D_2.
Il existe donc une droite de l'espace perpendiculaire à la droite D_1 et à D_2 : c'est la droite Δ.