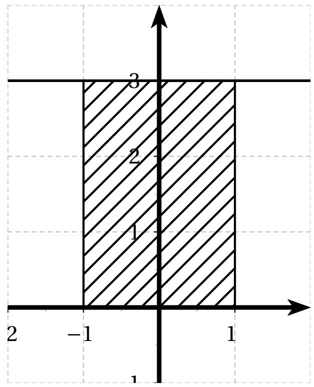
TS : correction de la feuille d'exercices (intégration) (1)

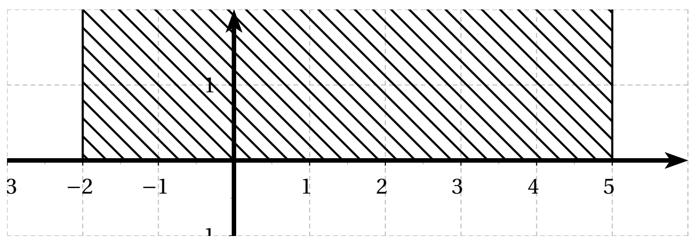
I

Calculer, en u.a. :

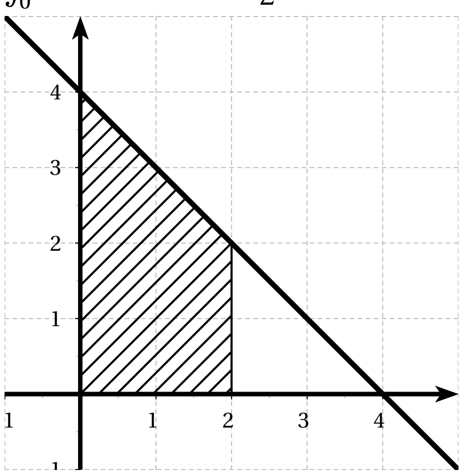
a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3 \, \mathrm{d}x = 6$ car on intègre la fonction constante $f : x \mapsto 3$



b) $\displaystyle\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x = 7$ car on intègre la fonction $f : x \mapsto 1$ sur $[-2 \; ; \; 5]$



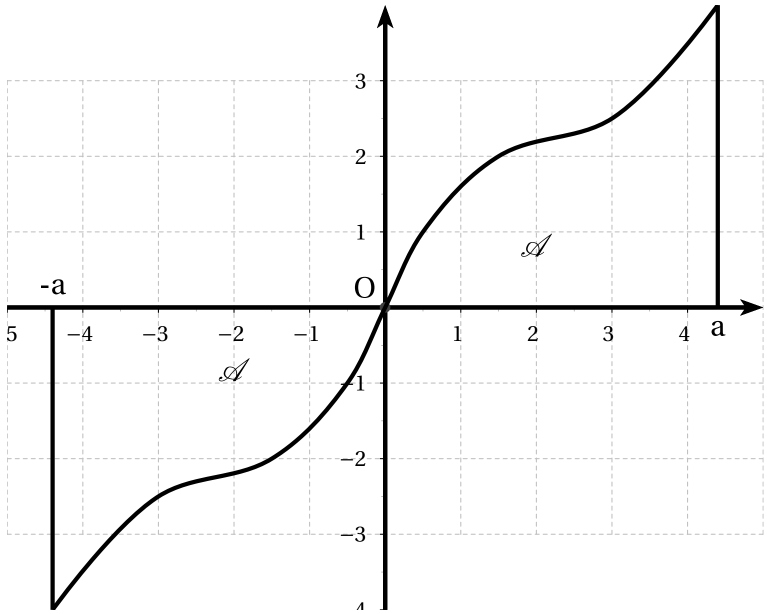
c) $\displaystyle\int_{0}^{2} (4 - x) \, \mathrm{d}x = \frac{(4+2) \times 2}{2} = 6$ en calculant l'aire d'un trapèze (voir figure)



II

Soit f une fonction impaire définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est donc symétrique par rapport à O.

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $a \in \mathbb{R} = \displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A} + \mathscr{A} = 0$ si on note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.



2. La fonction sin est impaire, donc $\boxed{\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 0}$

III

Que vaut $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$?

Un équation cartésienne du cercle de centre et de rayon 1 est $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ a pour représentation graphique le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du demi-disque supérieur, soit $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$.

IV

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 2 + \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive est $\boxed{F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x + \mathrm{e}^x}$

$f_2(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x^3} - \dfrac{x}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

donc une primitive est $F_2(x) = \ln x - \left(-\dfrac{1}{x}\right) + \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = \boxed{\ln x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + x - 1$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

$f_3(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + x - 1$ donc une primitive est $\boxed{\mathbf{F_3(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} - x}}$

$f_4(x) = 3(2x+5)^4$ sur $\mathbb{R}$

On essaye de faire apparaître $u'u^n$ en posant $u(x) = 2x+5$, d'où $u'(x) = 2$.

$f_4(x) = \dfrac{3}{2} \times 2(2x+5)^4$ donc $f_4 = \dfrac{3}{2}u'u^4$; une primitive est $F_4 = \dfrac{3}{2}\dfrac{u^5}{5}$ donc une primitive est $\boxed{\mathbf{F_4(x) = \dfrac{3}{10}(2x+5)^5}}$

$f_5(x) = 5\cos x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = \sin x$ donc $u'(x) = \cos x$, alors $f_5 = 5u'u^2$; une primitive est $F_5 = 5\dfrac{u^3}{3}$ donc une primitive est $\boxed{\mathbf{F_5(x) = \dfrac{5}{3}\sin^3 x}}$

$f_6(x) = -\dfrac{3}{x}(\ln x + 2)^2$

On cherche à faire apparaître $u'u^n$.

On pose $u(x) = \ln x + 2$; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On en déduit que : $f_6 = -3u'u^2$ donc une primitive est $F_6 = -3\dfrac{u^3}{3} = -u^3$.

Par conséquent, une primitive est $\boxed{\mathbf{F_6(x) = -(\ln x + 2)^3}}$

$f_7(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ sur $]0\ ;\ \pi[$.

On pose $u(x) = \sin x$, strictement positive sur l'intervalle considéré. On a $u'(x) = \cos x$

Alors : $f_7 = \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; ainsi une primitive de cette fonction est-elle :

$F_7 = 2\sqrt{u}$ donc $\boxed{\mathbf{F_7(x) = 2\sqrt{\sin x}}}$

$f_8(x) = \dfrac{3}{(-4x+1)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

On cherche à faire apparaître $\dfrac{u'}{u^2}$. On pose $u(x) = -4x+1$; alors $u'(x) = -4$.

$f_8(x) = -\dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{(-4x+1)^2}$ donc $f_8 = -\dfrac{3}{4}\dfrac{u'}{u^2}$. Une primitive est alors $F_8 = -\dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{1}{u}\right)$ donc $\boxed{\mathbf{F_8(x) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{-4x+1}}}$.

$f_9(x) = \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^7}$ sur $]-\infty\ ;\ -1[$

On fait apparaître $\dfrac{u'}{u^n}$; on pose $u(x) = x^2 - 1$; alors $u'(x) = 2x$.

On en déduit $f_9 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(x^2-1)^7} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u^7(x)}$.

Ine primitive est $F_9 = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{6u^6}\right)$ d'où $\boxed{\mathbf{F_9(x) = -\dfrac{1}{12\left(x^2-1\right)^6}}}$

$f_{10}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = e^x + 1$; alors $u'(x) = e^x$.

On en déduit $f_{10} = \dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$ donc une primitive est $F10 = \ln(u)$ d'où $\boxed{\mathbf{F_{10}(x) = \ln\left(e^x + 1\right)}}$.

$f_{11}(x) = \ xe^{-x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

On fait apparaître $u'e^u$; on pose $u(x) = -x^2 + 1$; alors $u'(x) = -2x$.

$f_{11}(x) = -\dfrac{1}{2} \times 2xe^{-x^2+1}$ donc $f_{11} = -\dfrac{1}{2}u'e^u$.

Une primitive es donc $F_{11} = -\dfrac{1}{2}e^u$ donc $\boxed{\mathbf{F_{11}(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2+1}}}$

V

f est la fonction définie sur $]-1\ ;\ 2[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

1. $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(a+b)x-2a+b}{(x+1)(x-2)}$.

   Pour que cette expression corresponde à $f(x)$, on doit avoir $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ -3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

   On en déduit que $\boxed{f(x) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x-2}} = \dfrac{1}{3}\left[-\ln(x+1) + \ln(x-2)\right)$

2. Une primitive de f est alors $\boxed{\mathbf{F(x) = \dfrac{1}{3}\left[-\ln(x+1) + \ln(x-2)\right]}}$ car $\dfrac{1}{x+1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x+1$.

   Remarque : on peut écrire $\boxed{\mathbf{F(x) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)}}$