TS-TD sur le théorème des valeurs intermédiaires

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. (a) g est continue sur $\mathbb{R}$ parce que c'est une fonction pôlynôme.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x - 4 = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (par produit)

   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   (c) g. est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

   $g'(x) = 3x^2 - 3 = \boxed{3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1)}$.

   $g'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$.

   $g'(x)$ est un polynôme du second degré; $g'(x)$ est positif, c'est-à-dire du signe du coefficient de x^2 en dehors des racines, donc sur $]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty[$ et négatif sur [-1; 1].

   $g(-1) = -2$ et $g(1) = -6$

   Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) D'après le tableau de variation, $g(x) \leqslant -2$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

   Sur $]1\ ;\ +\infty[$, g est continue, $g(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) =$ admet une solution, **unique** puisque g est crissante sur cet intervalle. on la note α

   (b) À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{2,19 < \alpha < 2,20}$.

   (c) On en déduit le signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : Etude de la fonction f

1. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty 1+\frac{2}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to/\infty} g(x) = +\infty}$.

2. (a) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 + 2x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$.

   $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3x^2 + 4x$ et $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2+4x\right)\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{x\,(3x+4)\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{x\left(3x^3-3x+4x^2-4-2x^3-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x\left(x^3-3x-4\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \boxed{\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}}$$

(b) Étudions les limites en -1 et 1 :

- $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+2x^2\right)=1.$

  $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(x^2-1\right)=0$ avec $x^2-1>0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty}$

  De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(x^2-1\right)=0$ avec $x^2-1<0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty}$.

- $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3+2x^2\right)=3>0.$

  $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^2-1\right)=0$ avec $x^2-1<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty.$

  De même : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ car $x^2-1>0$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖			$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Pour tout $x\in\mathcal{D}$, $x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)\left(x^2-1\right)+x+2}{x^2-1}=\dfrac{x^3-x+2x^2-2+x+2}{x^2-1}=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}=f(x)$

donc $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}}$

(b) Pour $x\neq0$, $\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1+\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\pm\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=0}$

Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ et Δ se rapprochent aussi près que l'on veut : Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de l'infini.

(c) $\forall x\in\mathcal{D}$, $f(x)-(x+2)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$.

On fait un tableau de signes :

Le numérateur s'annule en -2

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{x+2}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$\mathscr{C}$ est donc au-dessus de Δ pour $x \in [-2\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$ et en desous pour $x \in]-\infty\,;\,-2]\cup]-1\,;\,1[$.

Δ traverse donc $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

4. Courbe et asymptotes :