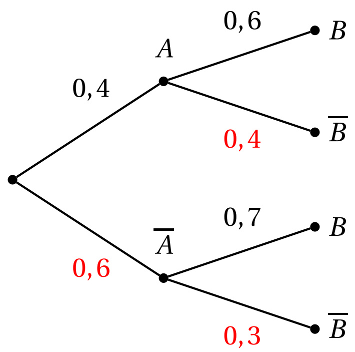
TS : correction du contrôle sur les probabilités conditionnelles et loi binomiale (2 heures)

I

Dans une population donnée, on étudie des caractères génétiques de deux sortes, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

On choisit au hasard une personne dans la population. On note A l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{A}$ » et B l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{B}$ ».

Claire a construit l'arbre suivant :



1. Les données issues de l'arbre sont :
   - $p(A) = 0,4$
   - $p_A(B) = 0,6$
   - $p_{\overline{A}}(B) = 0,7$
2. (a) • $B = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$ (réunion d'événements incompatibles)
   donc $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$
   $= 0,6 \times 0,4 + 0,7(1 - 0,4)$
   $= 0,24 + 0,7 \times 0,6 = 0,24 + 0,42 = 0,66$; $\boxed{p(B) = 0,66}$
   • $p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 0,34$; $\boxed{p\left(\overline{B}\right) = 0,34}$

   (b) La probabilité qu'une personne ne possède pas le caractère $\mathscr{B}$ sachant qu'elle possède le caractère $\mathscr{A}$ est
   $p_A\left(\overline{B}\right) = 0,4$
   (car $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B) = 1 - 0,6$); $\boxed{p_A\left(\overline{B}\right) = 0,4}$

II Vrai ou Faux

On justifiera chaque réponse.

a) Si $p(A) = 0,3$ et $p(B) = 0,7$, alors $B = \overline{A}$

FAUX : par exemple, dans une classe de 30 élèves, il y a 9 garçons et 21 élèves qui habitent Montrouge.

On choisit un élève au hasard; A est l'événement « être un garçon » et B l'événement « habiter Montrouge ».

$p(A) = \dfrac{9}{30} = 0,3$ et $p(B) = \dfrac{21}{30} = 0,7$ mais $B \neq \overline{A}$.

b) Si $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,6$, alors $p(A \cap B) = 0,12$

FAUX car on ne dit pas que A et B sont indépendants.

c) Si $p(A) = 0,2$ et $p_A(B) = 0,3$, alors $p(A \cap B) = 0,06$

VRAI : $P(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$

d) On suppose que $p(A) = 0,2$, que $p_A(B) = 0,3$ et que $p_{\overline{A}}(B) = 0,8$, alors $p(B) = 0,7$

VRAI :

$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P\left(\overline{A}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles)

donc $p(B) = 0,3 \times 0,2 + 0,8 \times 0,8 = 0,06 + 0,64 = 0,7$

e) On suppose que $p(A) = 0,2$, que $p_A(B) = 0,3$ et que $p(B) = 0,8$, alors $p(A \cup B) = 0,94$.

VRAI

- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,2 + 0,8 - 0,06 = 1 - 0,06 = 0,94$

III D'après Antilles-Guyane juin 2016

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

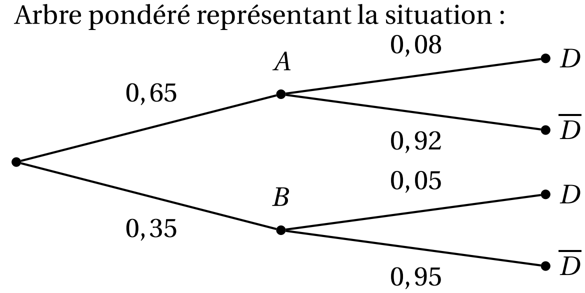
- à la sortie de la machine A : 8 % des ampoules présentent un défaut;
- à la sortie de la machine B : 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A »
- B : « l'ampoule provient de la machine B »
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

   (a) Arbre pondéré représentant la situation :



   (b) $p\left(B \cap \overline{D}\right) = p_B\left(\overline{D}\right) \times p(B)$
   $= 9,95 \times 0,35 = \boxed{0,3325}$.

(c) $p\left(\overline{D}\right) = p\left(A \cap \overline{D}\right) + p\left(B \cap \overline{D}\right)$
$= 0,65 \times 0,92 + 0,3325 = 0,598 + 0,3325 = 0,93$:

$$\boxed{p\left(\overline{D}\right) = 0{,}9305}$$

(d) $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{p\left(A \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0{,}598}{0{,}9305} \approx \boxed{0{,}6427}$

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre d'ampoules sans défaut issues du prélèvement.

   (a) On a répétition d'épreuves identiques à deux issues : X suit une loi binomiale, de paramètres $n = 10$ et $p = P_A\left(\overline{D}\right) = 0,92$

   Rappel : $p\,(X = k) = \dbinom{10}{k} \times 0,92^k \times 0,08^{10-k}$

   (b) $p(X = 7) = \dbinom{10}{7} \times 0,92^7 \times 0,08^3 \boxed{\approx 0{,}0343}$ (calculé à la calculatrice)

   (c) $p(X \geqslant 9) = 1 - p(X \leqslant 8) \boxed{\approx 0{,}8121}$

   (d) Obtenir au moins 2 ampoules présentant un défaut revient à obtenir au plus 8 ampoules ne présentant aucun défaut.
   $p(X \leqslant 8) = 1 - p(X \geqslant 9) \approx 1 - 0,8121 \boxed{\approx 0{,}1879}$

IV Jus de fruit

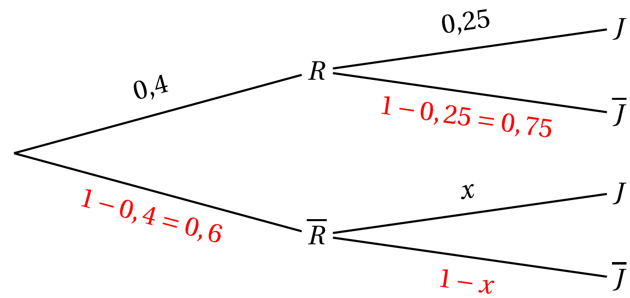
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $\boxed{P(J) = 0{,}2}$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right)$
   $= P(R) \times P_R(J) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = \boxed{0,1 + 0,6x}$
   $\left.\begin{array}{rcl} P(J) & = & 0,2 \\ P(J) & = & 0,1 + 0,6x \end{array}\right\} \implies 0,2 = 0,1 + 0,6x \iff \boxed{x = \dfrac{1}{6}}$

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Partie B

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.
   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la **loi binomiale** de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2. On cherche $P(X \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leqslant 74)$.
   À la calculatrice on trouve $\boxed{P(X \leqslant 74) \approx 0{,}0016}$ donc $\boxed{p(X \geqslant 75) \approx 0,998}$.